

PATENT ABSTRACTS OF JAPAN

(11)Publication number : 2001-051979

(43)Date of publication of application : 23.02.2001

(51)Int.Cl.

G06F 17/14

(21)Application number : 2000-158280

(71)Applicant : FLUENCY KENKYUSHO:KK

(22)Date of filing : 29.05.2000

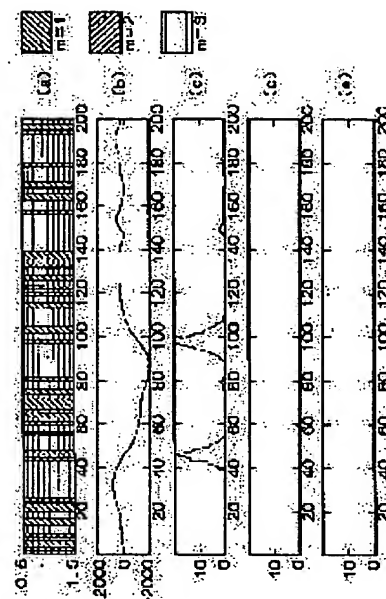
(72)Inventor : TORAICHI KAZUO
WADA KOICHI
OBATA MOTOKO

(30)Priority

Priority number : 11150712 Priority date : 28.05.1999 Priority country : JP

(54) METHOD AND DEVICE FOR PROCESSING DATA

(57)Abstract:

PROBLEM TO BE SOLVED: To make a method and a device suitable for computer mounting.**SOLUTION:** A class (m), to which an object signal belongs, can be specified by generating plural discrete data streams based on plural functions classified by the number of times of permitting differentiation, performing correlative operation with the plural discrete data streams parallel to input data and finding a special point included in the input data on the basis of result of that correlative operation. Therefore, a discontinuous signal or signal having the special point can be efficiently analyzed, the source signal can be highly accurately approximated while using the signal, which can be described by the simple function, and various kinds of processing to the signal can be realized with a little operation quantity.

LEGAL STATUS

[Date of request for examination]

[Date of sending the examiner's decision of rejection]

[Kind of final disposal of application other than the
examiner's decision of rejection or application converted
registration]

[Date of final disposal for application]

[Patent number]

[Date of registration]

[Number of appeal against examiner's decision of
rejection][Date of requesting appeal against examiner's decision
of rejection]

[Date of extinction of right]

(19) 日本国特許庁 (J P)

(12) 公開特許公報 (A)

(11) 特許出願公開番号

特開2001-51979

(P2001-51979A)

(43) 公開日 平成13年2月23日 (2001.2.23)

(51) Int.Cl.⁷

G 0 6 F 17/14

識別記号

F I

G 0 6 F 17/14

テーマコード(参考)

S

審査請求 未請求 請求項の数10 O L (全 38 頁)

(21) 出願番号 特願2000-158280 (P2000-158280)

(22) 出願日 平成12年5月29日 (2000.5.29)

(31) 優先権主張番号 特願平11-150712

(32) 優先日 平成11年5月28日 (1999.5.28)

(33) 優先権主張国 日本 (J P)

(71) 出願人 398008321

株式会社フルーエンシー研究所

東京都大田区山王2丁目5番6-213号

(72) 発明者 寅市 和男

埼玉県狭山市入間川1-14-2

(72) 発明者 和田 耕一

茨城県つくば市下広岡725-26

(72) 発明者 小畑 茂都子

茨城県つくば市天王台1-1-1 筑波大学 電子・情報工学系 並列分散処理研究室 室内

(74) 代理人 100103171

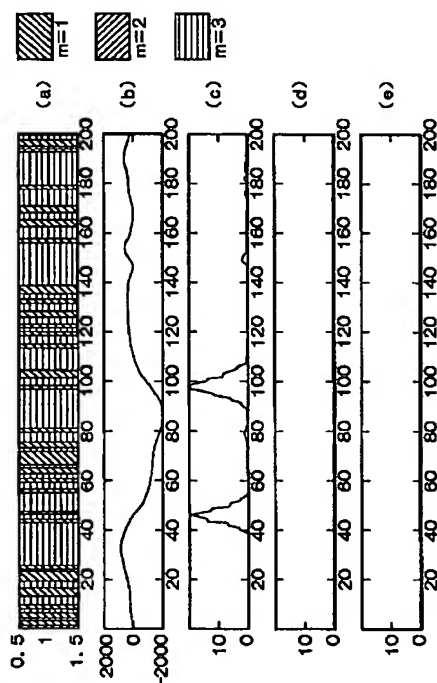
弁理士 雨貝 正彦

(54) 【発明の名称】 データ処理方法およびデータ処理装置

(57) 【要約】

【課題】 計算機実装に適したデータ処理方法およびデータ処理装置を提供すること。

【解決手段】 微分可能回数によって分類した複数の関数に基づいて発生させた複数の離散的なデータ列を生成し、入力データに対して並行して上述した複数の離散的なデータ列との間の相関演算を行った後に、その相関演算の結果に基づいて入力データに含まれる特異点を求めることにより、対象信号の属するクラス (m) を特定することができる。このため、不連続信号や特異点を持つ信号を効率よく解析することが可能であり、単純な関数で記述可能な信号を用いて元信号を高い近似精度で近似でき、信号に対する各種の処理を少ない演算量で実現することができる。



【特許請求の範囲】

【請求項 1】 微分可能回数によって分類した複数の関数に基づいて発生させた複数の離散的なデータ列を生成し、入力データに対して並行して前記複数の離散的なデータ列との間の相関演算を行った後に、その相関演算の結果に基づいて前記入カデータに含まれる特異点を求めることを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 2】 請求項 1 において、隣接する前記特異点に囲まれる前記入カデータに対して、前記相関演算の結果に基づいて、前記微分可能回数に着目した信号のクラス分けを行うことを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 3】 入力データを、 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間に含まれる出力データに変換するデータ処理方法であって、離散的な複数の前記入カデータのそれぞれに、前記クラス m に対応した所定の変換用関数の値を乗算し、各乗算結果を加算することにより前記出力データを得ることを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 4】 請求項 3 において、前記変換用関数は、離散データの間を前記クラス m の多項式信号空間に含まれる信号を用いて補間する場合にこの補間値を演算するために用いられる補間用関数に対して双直交性を有していることを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 5】 入力されるアナログ信号の瞬時値を、所定のサンプリング間隔で読み取ってデジタルデータに変換して出力する入力部と、前記入カ部から順次出力される複数の前記デジタルデータに対して、所定の変換用関数の値を乗算し、各乗算結果を加算するデータ変換部と、を備え、前記アナログ信号をクラス m の多項式信号空間に含まれるデジタルデータに変換することを特徴とするデータ処理装置。

【請求項 6】 請求項 5 において、前記変換用関数は、 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間に含まれる信号を用いて前記入カ部から出力されるデジタルデータの間を補間する場合にこの補間値を演算するために用いられる補間用関数に対して双直交性を有していることを特徴とするデータ処理装置。

【請求項 7】 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間を考えた場合に、入力データが含まれる多項式信号空間のクラスを判定するデータ処理方法であって、離散的な前記入カデータに所定の間引き処理を行う第 1 のステップと、前記間引き処理がなされた後のデータに対して、 m の値が異なる複数のクラスのそれぞれに対応した補間用関数を用いて補間演算を行う第 2 のステップと、前記第 2 のステップにおいて得られた補間データと前記

間引き処理前のデータとの誤差を演算する第 3 のステップと、

前記第 3 のステップにおいて演算された誤差が最も小さい前記補間データに対応するクラスを、前記入カデータが含まれる多項式信号空間のクラスとして判定する第 4 のステップと、

を有することを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 8】 請求項 7 において、前記第 4 のステップにおいて判定されたクラス m の値が変化する位置を、前記入カデータの特異点として抽出する第 5 のステップを有することを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 9】 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間を考えた場合に、入力データが含まれる多項式信号空間のクラスを判定するデータ処理装置であって、

離散的な前記入カデータに対して所定の間引き処理を行う間引き処理部と、

前記間引き処理がなされた後のデータに対して、 m の値が異なる複数のクラスのそれぞれに対応した補間用関数を用いて補間演算を行う補間演算部と、

前記補間演算部によって得られた各クラス毎の補間データと前記間引き処理前のデータとの誤差をクラス毎に演算する誤差演算部と、

前記誤差演算部によって演算された誤差が最も小さい前記補間データに対応するクラスを判定するクラス判定部と、

を備えることを特徴とするデータ処理装置。

【請求項 10】 請求項 9 において、前記クラス判定部によって判定されたクラス m の値が変化する位置を、前記入カデータの特異点として抽出する特異点抽出部を備えることを特徴とするデータ処理装置。

【発明の詳細な説明】

【0001】

【発明の属する技術分野】本発明は、自然界に存在する連続、不連続、滑らか(微分可能)、およびこれらの組み合わせからなる信号等の様々な時系列データを関数展開によって近似して記述するデータ処理方法およびデータ処理装置に関する。

【0002】

【従来の技術】自然界には、連続、不連続、滑らか(微分可能)、およびこれらの組み合わせからなる信号等の様々な時系列データが存在する。音声、画像、通信等の工学分野において、観測された信号を関数展開によって正確に近似し記述することは、各種の情報処理、例えばノイズ除去、情報圧縮等を的確に行うために極めて重要である。

【0003】関数展開に利用される関数系としては、フーリエ級数が一般的である。フーリエ級数の展開係数は

周波数という物理的意味を持つため、人間の視聴覚を対象とする多くの工学分野に応用されている。しかし、フーリエ信号空間は無限回微分可能な指数関数を基底としているために、パルスや方形波を例とする不連続信号や三角波を例とする滑らかさのない信号をフーリエ級数によって効率的に扱うことは困難である。また、信号の時間軸上に局在する構造は、周波数領域においてその位置が特定できないという問題点も指摘されている。

【0004】最適な関数展開を与える直交変換として、KL (Karhunen-Loeve) 変換が知られているが、これに対してもフーリエ級数展開と同様の問題が生じる。KL 変換は、M次元ユークリッド空間 E^M において観測された入力パターン (入力信号)

【0005】

【数1】

$$\{x_n : n = 1, 2, \dots, N\}, x_n \in E^M$$

【0006】を任意のK次元空間に最も効率よく射影する変換である。すなわち、汎関数 $J(\{\phi_k\}_{k=1}^K)$ を

【0007】

【数2】

$$J(\{\phi_k\}_{k=1}^K) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|x_n - \sum_{k=1}^K (y_k^{(n)}, \phi_k)\|^2, \\ y_k^{(n)} = (x_n, \phi_k)$$

【0008】と定義したときに、汎関数 J を最小にする正規直交関数によって定義される。ここで、上述した汎関数 $J(\{\phi_k\}_{k=1}^K)$ において、「 J 」の右上に記載してある「 K 」と、「 J 」の右下に記載してある「 $k=1$ 」は、(数2)でも示したとおり本来は同列に記載されるべきであるが、明細書中ではそのような記載ができないため、上述したように位置をずらして記載するものとする。同様に、本明細書中では、例えば、文字「A」の右上に文字「1」が記載され、文字「A」の右下に文字「2」が記載されるべき場合に、文字「1」と文字「2」を同列に表現することができないため、「 A_1^2 」というように位置をずらして記載するものとする。

【0009】一般に自然界において観測される音声信号や画像データに対して、KL基底系はフーリエ基底系と類似する場合が多いことが知られている。また、近年、上述したようなフーリエ基底系の問題を克服するために、ウェーブレットやスプライン等の新しい関数系が注目されている。

【0010】

【発明が解決しようとする課題】ウェーブレット級数は、一つの関数 (マザーウェーブレット) から拡大・縮小と平行移動によって導出される基底を作用させる階層的な信号展開である。マザーウェーブレットを拡大・縮小することでその解像度が変化するため、特異点の位置を抽出することが可能となる。しかし、展開結果はマザ

ーウェーブレットに依存して大きく変化するため、対象信号の性質に応じてマザーウェーブレットを適切に選択する必要がある。現段階において、適切なマザーウェーブレットの選択方法に関する統一的な方法は確立されていない。

【0011】また、区分多項式から構成されるスプライン関数系は、元来、与えられたデータ点を通る曲線、すなわち補間曲線を生成する目的で導出されたが、目的に適した次数のスプライン関数を展開基底とすることでフーリエ級数では扱うことが困難な信号も効率的に記述できることから、関数近似の分野においても広く用いられるようになった。中でもBスプラインと呼ばれる一連の関数は、方形波の畳み込みだけで生成が可能であるため実装が簡単な上、低次のBスプラインはサポートが小さいという理由から少ない演算量で近似が行うことができるという利点も持ち合わせている。しかし、利用するスプラインの次数を決定する方法については未だ多くの検討を必要としている。

【0012】上述したような関数系における有用性や問題点を踏まえ、本発明は、時間軸上に局在する信号の構造を捕らえることができ、かつ、不連続信号や特異点を持つ信号を効率良く記述することが可能であるという特性を有するフルーエンシ関数系に注目し、計算機実装に適したデータ処理方法およびデータ処理装置を提供することを目的とする。

【0013】

【課題を解決するための手段】上述した課題を解決するために、請求項1のデータ処理方法は、微分可能回数によって分類した複数の関数に基づいて発生させた複数の離散的なデータ列を生成し、入力データに対して並行して前記複数の離散的なデータ列との間の相関演算を行った後に、その相関演算の結果に基づいて前記入力データに含まれる特異点を求めることを特徴とする。

【0014】また、請求項2のデータ処理方法は、請求項1のデータ処理方法において、隣接する前記特異点に囲まれる前記入力データに対して、前記相関演算の結果に基づいて、前記微分可能回数に着目した信号のクラス分けを行うことを特徴とする。

【0015】請求項3のデータ処理方法は、入力データを、 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間に含まれる出力データに変換するデータ処理方法であって、離散的な複数の前記入力データのそれぞれに、前記クラス m に対応した所定の変換用関数の値を乗算し、各乗算結果を加算することにより前記出力データを得ることを特徴とする。

【0016】請求項4のデータ処理方法は、請求項3のデータ処理方法において、前記変換用関数は、離散データの間を前記クラス m の多項式信号空間に含まれる信号を用いて補間する場合にこの補間値を演算するために用いられる補間用関数に対して双直交性を有していること

を特徴とする。

【0017】請求項5のデータ処理装置は、入力されるアナログ信号の瞬時値を、所定のサンプリング間隔で読み取ってデジタルデータに変換して出力する入力部と、前記入力部から順次出力される複数の前記デジタルデータに対して、所定の変換用関数の値を乗算し、各乗算結果を加算するデータ変換部とを備え、前記アナログ信号をクラスmの多項式信号空間に含まれるデジタルデータに変換することを特徴とする。

【0018】請求項6のデータ処理装置は、請求項5のデータ処理装置において、前記変換用関数は、 $(m-1)$ 階微分可能なクラスmの多項式信号空間に含まれる信号を用いて前記入力部から出力されるデジタルデータの間の補間する場合にこの補間値を演算するために用いられる補間用関数に対して双直交性を有していることを特徴とする。

【0019】請求項7のデータ処理方法は、 $(m-1)$ 階微分可能なクラスmの多項式信号空間を考えた場合に、入力データが含まれる多項式信号空間のクラスを判定するデータ処理方法であって、離散的な前記入力データに所定の間引き処理を行う第1のステップと、前記間引き処理がなされた後のデータに対して、mの値が異なる複数のクラスのそれぞれに対応した補間用関数を用いて補間演算を行う第2のステップと、前記第2のステップにおいて得られた補間データと前記間引き処理前のデータとの誤差を演算する第3のステップと、前記第3のステップにおいて演算された誤差が最も小さい前記補間データに対応するクラスを、前記入力データが含まれる多項式信号空間のクラスとして判定する第4のステップとを有することを特徴とする。

【0020】請求項8のデータ処理方法は、請求項7のデータ処理方法において、前記第4のステップにおいて判定されたクラスmの値が変化する位置を、前記入力データの特異点として抽出する第5のステップを有することを特徴とする。請求項9のデータ処理装置は、 $(m-1)$ 階微分可能なクラスmの多項式信号空間を考えた場合に、入力データが含まれる多項式信号空間のクラスを判定するデータ処理装置であって、離散的な前記入力データに対して所定の間引き処理を行う間引き処理部と、前記間引き処理がなされた後のデータに対して、mの値

$$({}^m\psi_i(t), {}^m\psi_j(t)) = \delta_{ij},$$

【0026】を満たす。ここで、

【0027】

$${}^m\psi_k(t) = {}^m\psi_0(t - kh),$$

$${}^m\psi_k(t) = {}^m\psi_0(t - kh),$$

【0028】であり、 (u, v) は以下に示す内積

【0029】

【数5】

が異なる複数のクラスのそれぞれに対応した補間用関数を用いて補間演算を行う補間演算部と、前記補間演算部によって得られた各クラス毎の補間データと前記間引き処理前のデータとの誤差をクラス毎に演算する誤差演算部と、前記誤差演算部によって演算された誤差が最も小さい前記補間データに対応するクラスを判定するクラス判定部とを備えることを特徴とする。

【0021】請求項10のデータ処理装置は、請求項9のデータ処理装置において、前記クラス判定部によって判定されたクラスmの値が変化する位置を、前記入力データの特異点として抽出する特異点抽出部を備えることを特徴とする。

【0022】

【発明の実施の形態】フルーエンシ理論が考慮する多項式信号空間 \mathcal{M}_S は、その連続微分可能性 m ($= 1, 2, 3, \dots$) により類別されており、対応するクラスmのフルーエンシ・デジタル／アナログ (D/A) 関数 ${}^m\psi_k(t)$ とフルーエンシ・アナログ／デジタル (A/D) 関数 ${}^m\psi_k(t)$ と呼ばれる区分多項式によって張られている。ここで、上述したA/D関数 ${}^m\psi_k(t)$ において、「 ψ 」の左上に添え字してある「m」と、「 ψ 」の左下に添え字してある「*」は、本来は同列に記載されるべきであるが、明細書中ではそのような記載ができないため、上述したように位置をずらして記載するものとする。同様に、本明細書中では、例えば、文字「A」の左上に文字「1」が記載され、文字「A」の左下に文字「2」が記載されるべき場合に、文字「1」と文字「2」を同列に記載することができないため、「1₂A」というように位置をずらして記載するものとする。

【0023】多項式信号空間 \mathcal{M}_S は、 $(m-2)$ 次、 $(m-1)$ 階微分可能である信号により構成される。したがって方形波は $m=1$ 、三角波は $m=2$ 、そしてフーリエ信号空間に属する信号は $m=\infty$ に分類される (図1参照)。また、スプライン関数基底により構成される信号も \mathcal{M}_S に含まれることになる。

【0024】上述したD/A関数およびA/D関数は、自己とは直交しないが互いに直交する双直交性

【0025】

【数3】

(1)

【数4】

(2)

(3)

$$(u, v) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} dt$$

【0030】を表す。また、 ${}^m\psi_k(t)$ 、 ${}^m\psi_k$

$k(t)$ 、および

【0031】

【数6】

$$s(t) \in {}^m S$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) {}^m \psi_k(t), \quad (4)$$

$$s(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{{}^m \psi_k(t)} dt, \quad (5)$$

【0034】を満足する。これは、クラス m のD/A関数によって完全に再構成可能な信号は ${}^m S$ に属することを意味し、このような信号はクラス m のA/D関数により幅 h で離散化された場合、幅 h でサンプルされた信号の値そのものと一致する(図2参照)。ただし幅 h は固定されているものとする。したがって、対象信号が ${}^m S$ に属する場合、クラス m のA/D関数は δ 関数と同様の働きをし、A/D関数を作用させた結果と原信号との差を最小とするクラス m は信号の属する空間を直ちに与える。このように、フルーエンシ理論では、スプライン関数系やウェーブレット級数において課題となっている適

$$v(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m \psi_k(t)} dt, \quad (6)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t_k) {}^m \psi_k(t), \quad (7)$$

【0039】とすることで、 $x(t)$ を L_2 ノルムの意味で最適近似する

【0040】

【数10】

$$s(t) \in {}^m S$$

【0041】を生成することができる(図3参照)。A/D関数による展開係数の導出は、積分操作で実現されるためノイズにも強い点を考慮すると、実用的な処理系を構成するにあたって非常に有用であるといえる。また、正確に近似を行うことが可能なこと以外にも、対象信号のクラスを特定できるという利点が挙げられる。クラス m のフルーエンシ関数系は、微分可能なクラス m 以下の信号を記述することが可能であるが、フルーエンシ関数系では低次クラスほど収束が早いので、クラス m の信号に対してはクラス m のフルーエンシ関数を用いることで変換に要する演算量が最小となる。したがって、計画上への実装を行う際に演算量の低減が可能となる。

【0042】フルーエンシ関数系は上述したような優れた性質を有するが、実データへ適用する場合には、

(1) サポート(台)が無限区間であるフルーエンシ関数が存在する、(2) フルーエンシ関数のサポートを打ち切り、かつ時間方向に離散化した場合に双直交性が保証されない、(3) 連続微分可能性が定義できない離散

【0032】は次の関係

【0033】

【数7】

切な基底の選択方法が提供されている。したがって、フーリエ級数の適用が困難な不連続信号や滑らかさのない信号も、適切なフルーエンシ関数を適用することで効率よく記述できる。

【0035】一般に、アナログ信号

【0036】

【数8】

$$x(t) \in L_2$$

【0037】に対しては、

【0038】

【数9】

データから原信号の属する空間を特定することが困難である、といった点が問題となる。

【0043】次に、上述したフルーエンシ関数系における問題点について説明する。フルーエンシ関数系のサポートは無限区間であるが、DSP(デジタル・シグナル・プロセッサ)等のデジタル素子によって処理系を実装する場合は、サポートを有限区間で打ち切る必要がある。サポートを単純に打ち切った場合、A/D関数、D/A関数の双直交性は保たれなくなるが、その際に生じる近似誤差についての理論的検討は過去になされていない。そこで、まずA/D関数の上界を導出し、これを基にフルーエンシ関数展開の近似誤差の理論的上界を基底関数のサポートの打ち切り幅の関数として導出したところ、この関係式から、高次のフルーエンシ関数ほど近似精度を保つためには長いサポート幅を必要とすることが明らかになった。具体的には、44.1kHzで60分間サンプリングする場合に、二乗誤差を-100dBに押さえるためには、クラス $m=2$ で703.3μsec、 $m=4$ で1135.0μsec、そしてクラス $m=7$ で2020.3μsecのサポートを必要とすることが判明した。

【0044】また、フルーエンシ関数のサポートを打ち切り、かつ時間方向に離散化した場合、双直交な関数の

形状が理論値から大きく異なる。そこで、本発明では、コンパクトなD/A関数に注目し、これと双直交性が保証されるよう所望のサポート幅を持つ離散化されたA/D関数を新たに定義した。本発明では、この新たに定義した離散化されたA/D関数およびD/A関数をそれぞれ「ダウンサンプリング基底ベクトル」および「アップサンプリング基底ベクトル」と称し、これらを総称して「フルーエンシベクトル」と称することとする。この新たに定義したフルーエンシベクトルを実データに適用し、従来の理想ローパスフィルタを用いるレート変換法と比較した。この結果、従来法が全ての離散データに対して必ずしも最適な近似を行わないことが明らかとなった。また、最適な近似を行うフルーエンシベクトルのクラスは単一ではなく、時間とともに変化していることが確認された。また、対象信号の局所的性質に応じて複数クラスのフルーエンシベクトルの中から適切なものを選択することで近似精度を改善できることが判明した。

【0045】フルーエンシ理論では、対象信号の属するクラスを特定することにより信号を効率よく記述することができ、変換に要する演算量を低減することができる。したがって、多項式信号空間 \mathcal{M}_S のいずれか1つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$ ($j=0, 1, 2, \dots$)で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定することができる。入力データ全点において各クラスのダウンサンプリング基底ベクトルとの相関を求め、その結果、入力データと最も距離の近い(L_2 ノルムにおいて距離が最も小さい)相関値を与えるクラス m を信号の属する空間とした。さらには、方形波、三角波、2次曲線等に本方法を適用し、その有効性を確かめた。この結果、対象信号がある程度細かくサンプリングされていれば本方法が有効であることが確認された。

【0046】上述したフルーエンシ関数系の問題を踏まえ、本発明では、サポートの打ち切りから生じる誤差の理論的評価を行った結果に基づき、双直交性を保つ離散フルーエンシ関数を定義し、離散データにおける最適クラスを決定する方法を提供する。以下、上述した(1)サポートの打ち切りから生じる誤差の理論的評価、

$${}^m\phi_l(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \right)^m e^{j2\pi f(t-lh)} df. \quad (8)$$

【0054】(数12)で示したBスプライン基底の性質として、次の3つが挙げられる。

・ $\phi_l(t)$ のサポートはローカルである。すなわち、

$$t \notin ((l-m/2)h, (l+m/2)h) \text{ に対して,}$$

$$\phi_l(t) = 0 \quad (9)$$

【0056】 $\phi_l(t)$ はシフト不変である。すなわち、

(2) 双直交性を保つ離散フルーエンシ関数の定義、
(3) 離散データにおける最適クラスの決定方法、の各々について分けて説明する。

【0047】(1) サポートの打ち切りから生じる誤差の理論的評価

フルーエンシ関数系では、サポートが無限区間で定義されているものも存在することから、計算機上へ実装するためにはそのサポートを有限区間とする必要が生じる。しかし、サポートを単純に打ち切った場合、A/D関数、D/A関数の双直交性は保たれなくなり近似誤差が生じる。低次クラスのフルーエンシ関数系は収束する速度が速いため、従来用いられている理想ローパスフィルタなどと比較して同じサポート幅(打ち切り幅)に対して生じる誤差は小さいが、その誤差についての理論的検証はなされていない。したがって、A/D関数の上界を導出し、これとD/A関数の上界から、サポートの打ち切りにより生じる近似誤差の上界をサポート幅の関数として導出した。この関係式から、許容誤差に応じた打ち切り幅の選択が可能となるため、実システムを構築するにあたって非常に有用であると考えられる。

【0048】次に、 $L_2(R)$ に対する多項式信号空間 \mathcal{M}_S の位置づけ、そして $L_2(R)$ に属する信号と \mathcal{M}_S に属する信号の関係を説明する。フルーエンシ理論では、信号はその連続微分可能性によりクラス分けされる。

【0049】

【数11】

$$\mathcal{M}_S \subset L_2(R)$$

【0050】を $(m-1)$ 次： $(m=1, 2, \dots)$ のBスプライン基底

【0051】

【数12】

$$\{{}^m\phi_l(t)\}_{l=-\infty}^{\infty}$$

【0052】により張られる多項式信号空間であるとす。ここでBスプライン関数 ${}^m\phi_l(t)$ は次のように定義される。

【0053】

【数13】

【0055】

【数14】

【0057】

【数15】

$$\phi_l(t) = \phi_0(t - lh) \quad (10)$$

【0058】 $\phi_l(t)$ は lh に対して対称である。
すなわち、

$$\phi_l(t) = \phi_l(2lh - t) \quad (11)$$

【0060】 ここで、 $l=0$ とすると上述した (11) 式は

$$\phi_0(t) = \phi_0(-t) \quad (12)$$

【0062】 となるので $\phi_0(t)$ は偶関数となる。 $m \geq 2$ のとき、 $\mathcal{M}S$ は $(m-2)$ 階微分可能なBスプライン信号空間となる。また、 $m=1$ の場合には $\mathcal{M}S$ はウォルシュ信号空間となり、 $m=\infty$ の場合には $\mathcal{M}S$ はフーリエ信号空間となる。

【0063】 s を $\mathcal{M}S$ に属するアナログ信号とし、これを時刻

【0064】

【0059】

【数16】

【0061】

【数17】

【数18】

$$\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, (t_k = kh)$$

【0065】 で離散化したとすると、 $\mathcal{M}S$ の標準化基底は、以下の式

【0066】

【数19】

$$\forall s \in \mathcal{M}S, s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) {}^m\psi_k(t), \quad (13)$$

【0067】 を満たす

【0068】

【数20】

$$\{{}^m\psi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0070】

【数21】

$$\{{}^m\psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0071】 によって以下のように与えられる。

【0072】

【数22】

【0069】 によって与えられる。また、展開係数 $s(t_k)$ は標準化基底とは双直交な関係にある基底

$$s(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{{}^m\psi_k(t)} dt. \quad (14)$$

【0073】 上述した (13) 式および (14) 式による信号の展開を $\mathcal{M}S$ における双直交展開と呼ぶ。 $\mathcal{M}S$ に対するこれらの基底は以下のように求められている。

【0074】

【数23】

$${}^m\psi_k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m\beta_{|l-k|} {}^m\phi_0(t - lh), \quad (15)$$

$$\overline{{}^m\psi_k(t)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m g_{|l-k|} {}^m\psi_0(t - lh), \quad (16)$$

【0075】 ここで、

【数24】

【0076】

$${}^m\beta_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} {}^m B(f) e^{j2\pi f p h} df, \quad (17)$$

$${}^m B(f) = \frac{1}{\sum_{q=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} {}^m\phi_0(qh) e^{-j2\pi f q h}}, \quad (18)$$

$${}^m g_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{1}{{}^m G(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (19)$$

$${}^m G(f)^{-1} = \frac{h}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+q)}{\pi(fh+q)} \right)^{2m} {}^m B(f+q/h)^2} \quad (20)$$

【0077】である。上述した $m_f B(f)$ は、

【0078】

【数25】

$$\{m\beta_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$$

【0079】のフーリエ変換であり、 $m_f G(f)^{-1}$ は、

【0080】

【数26】

$$\{mg_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$$

【0081】のフーリエ変換である。以後、 $m\psi_k(t)$ をD/A関数、

【0082】

【数27】

$$\{m\psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0083】をD/A基底、 $m_*\psi_k(t)$ をA/D関数、

【0084】

【数28】

$$\{m_*\psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0085】をA/D基底と呼ぶ。クラス $m=1$ および $m=2$ のA/D関数 $m_*\psi_0(t)$ とD/A関数 $m\psi_0(t)$ を図4に示す。図4(a)は $m=1$ のA/D関数、図4(b)は $m=1$ のD/A関数、図4(c)は $m=2$ のA/D関数、図4(d)は $m=2$ のD/A関数をそれぞれ示している。また、 $m=3$ および $m=\infty$ のA/D

$$x(t) = s_o(t) + s_c(t)$$

【0096】で表すことができ、 s_o は x の mS への最小二乗近似となる。実信号は、通常、有限時間で観測されるので、 x も

$$x(t) = 0, t < 0 \text{ or } t > T \triangleq (N-1)h, \quad (22)$$

【0098】とし、有限時間 $[0, T]$ で定義する。ここで、 N は正の整数である。以後、上述した(22)式で定義した x を近似することを考える。 x にA/D関数

$$\begin{aligned} v_k &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{m_*\psi_k(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{m_*\psi_0(t - kh)} dt \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

【0100】(21)式を(23)式の x に代入し、さらに次の関係

$$(s_c, m_*\psi_k)_{L_2} = 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

【0102】を用いると、

【0103】

$$v_k = s_0(t_k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

【0104】が導かれる。上述した(25)式は、

【0105】

D関数とD/A関数を図5に示す。図5(a)は $m=3$ のA/D関数、図5(b)は $m=3$ のD/A関数、図5(c)は $m=\infty$ のA/D関数、図5(d)は $m=\infty$ のD/A関数をそれぞれ示している。

【0086】次に、サポートの打ち切りによる近似誤差について説明する。信号空間 $L_2(R)$ は、 mS とその直交空間である

【0087】

【数29】

$$mS^\perp$$

【0088】の直和から構成されているので、任意の

【0089】

【数30】

$$x \in L_2(R)$$

【0090】は、

【0091】

【数31】

$$s_o \in mS$$

【0092】と

【0093】

【数32】

$$s_c \in mS^\perp$$

【0094】の和

【0095】

【数33】

$$(21)$$

【0097】

【数34】

を作用させ、その結果を v_k とする。

【0099】

【数35】

【0101】

【数36】

【数37】

【数38】

$$x \in L_2(R)$$

【0106】の最小二乗近似

【0107】

【数39】

$$\begin{aligned} s_0 &\in {}^m S \\ s_0(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m \psi_k(t), \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m \psi_k(t), \end{aligned} \quad (26)$$

【0110】によって表せることを意味している。

【0111】

【数41】

$$s_0 \in {}^m S$$

【0112】に対する v_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) から構成されているすべてのベクトル $v \rightarrow$ はヒルベルト空間の部分空間となる。ここで、本明細書中におい

$$\forall u, \forall w \in G; (u, w)_{l_2} \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \overline{w_k}, \quad (27)$$

$$l_2 \triangleq \left\{ v \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 < +\infty \right. \right\} \quad (28)$$

【0115】のように定義されており、次のノルムを保証する。

$$\|u\|_{l_2} \triangleq \sqrt{(u, u)_{l_2}}. \quad (29)$$

【0117】(23)式および(26)式は、無間区間積分と無限級数の形で表されているため、計算機上に実装するにはこれらの積分区間と級数を有限とする必要が生じる。そこで $H > 0$ に対してサポートを $[-Hh, H$

$${}^m \tilde{\psi}_0(t) \triangleq \begin{cases} {}^m \psi_0(t), & |t| \leq Hh, \\ 0, & |t| > Hh, \end{cases} \quad (30)$$

$${}^m \tilde{\psi}_0(t) \triangleq \begin{cases} {}^m \psi_0(t), & |t| \leq Hh, \\ 0, & |t| > Hh, \end{cases} \quad (31)$$

【0119】と表す。上述した(30)式および(31)式を(23)式と(26)式に代入し、 $t - kh = \tau$ とすると、有限区間とした D/A 関数と A/D 関数に

$$\tilde{v}_k = \int_{-Hh}^{Hh} x(\tau + kh) \overline{{}^m \tilde{\psi}_0(\tau)} d\tau, \quad (32)$$

$$\tilde{s}_0(t) = \sum_{k=\lfloor t/h-H \rfloor}^{\lfloor t/h-H \rfloor} \tilde{v}_k {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh). \quad (33)$$

【0121】したがって、 x の最小二乗近似 s_0 とサポートを打ち切った場合の近似

【0122】

【数46】

$$\tilde{s}_0$$

【0108】が、

【0109】

【数40】

てはベクトルを太字によって記載することができないため、上述した「ベクトル $v \rightarrow$ 」のようにベクトル量を表す文字の右に矢印「 \rightarrow 」を記載することにより、その文字がベクトル量であることを示すこととする。

【0113】ヒルベルト空間においては、内積が

【0114】

【数42】

【0116】

【数43】

h] とした D/A 関数と A/D 関数を

【0118】

【数44】

よる近似は次のようになる。

【0120】

【数45】

【0123】との相対的な誤差は、次の二乗ノルムとして表すことができる。

【0124】

【数47】

$$\frac{\left[\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\left[\int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}}. \quad (34)$$

【0125】次に、
【0126】
【数48】

$$x \in L_2$$

【0127】の最小二乗近似とサポートを打ち切った場合の近似との相対的な誤差について説明する。その準備

$${}^1\psi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t/h| < 1/2, \\ 0, & |t/h| \geq 1/2, \end{cases} \quad (35)$$

$${}^2\psi_0(t) = \begin{cases} 1 - |t/h|, & |t/h| < 1, \\ 0, & |t/h| \geq 1. \end{cases} \quad (36)$$

【0129】2. $m \geq 3$ のとき、以下の関係を満たす m U と m_u ($0 < m_u < \infty$, $0 < m_u < 1$) が存在する。

$$|{}^m\psi_0(t)| \leq m_u ({}^mU)^{|t|/h} \quad (37)$$

【0131】 $m=1$ または $m=2$ の場合、 ${}^m\psi_0$ のサポートは有限なので打ち切る必要はない。 $m \geq 3$ の場合、 $|{}^m\psi_k(t)|$ は $|t|$ が増加するとともに指数関数的に減少していく。次に、 A/D 関数の上界を求める準備として以下に3つの補助定理を示す。

$${}_f^m B(f + l/h) = {}_f^m B(f) \quad (38)$$

【0134】上述した補助定理2は、次のようにして証明される。 ${}_f^m B(f)$ は以下のように変形できる。

$${}_f^m B(f) = \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+p)}{\pi(fh+p)} \right)^m}. \quad (39)$$

【0136】任意の整数 l に対して、
【0137】

$$\begin{aligned} {}_f^m B(f + l/h) &= \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi((f+l/h)h+p)}{\pi((f+l/h)h+p)} \right)^m}, \\ &= \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+(l+p))}{\pi(fh+(l+p))} \right)^m}, \\ &= \frac{h}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+q)}{\pi(fh+q)} \right)^m} \end{aligned} \quad (40)$$

【0138】となる。ここで、 $q = l + p$ とした。(39) 式および (40) 式から、

$${}_f^m B(f + l/h) = {}_f^m B(f) \quad (41)$$

【0140】が導出される。この補助定理は、 ${}_f^m B(f)$ が周期 $1/h$ の周期関数であることを意味している。

(補助定理3) :

として、まず D/A 関数と A/D 関数の上界を説明する。 D/A 関数の上界を、以下の補助定理1に示す。

(補助定理1) :

1. $m=1, 2$ のとき

【0128】

【数49】

【0130】

【数50】

【0132】(補助定理2) : 任意の整数 l に対して、次の関係が成立する。

【0133】

【数51】

【0135】

【数52】

【数53】

【0139】

【数54】

【0141】

【数55】

$$\{ {}^m d_p \}_{p=-\infty}^{\infty}$$

【0142】が、
【0143】

【数56】

$${}^m d_p = \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} {}^{2m} \beta_{p-k} {}^m \phi_0(kh) \quad (42)$$

【0144】として与えられているとすると、A/D関
数 ${}^m \psi_0(t)$ はBスプライン関数の線形結合

【0145】

【数57】

$${}^m \psi_0(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^m d_p {}^m \phi_p(t), \quad (43)$$

【0146】で表すことができる。上述した補助定理3
は、次のようにして証明される。(13)式を(14)
式の ${}^m \psi_0$ として代入すると、 ${}^m \psi_0(t)$ はBスプ

インの線形結合の形で表すことができる。

【0147】

【数58】

$$\begin{aligned} {}^m \psi_0(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \psi_0(t - kh), \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \beta_{p-k} \right] {}^m \phi_0(t - ph). \end{aligned} \quad (44)$$

【0148】 ${}^m d_p$ を

【0149】

【数59】

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \beta_{p-k}$$

【0150】とすると、 ${}^m d_p$ は離散フーリエ変換におけ
る畳み込みの定理より以下のようにになる。

【0151】

【数60】

$${}^m d_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{{}^m B(f)}{{}^m G(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (45)$$

【0152】補助定理2と(39)式を(20)式に適
用すると、 ${}^m G(f)$ は、

【0153】

【数61】

$${}^m G(f) = \frac{{}^m B(f)^2}{{}^{2m} B(f)} \quad (46)$$

【0154】となり、

【数62】

【0155】

$${}^m d_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{{}^{2m} B(f)}{{}^m B(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (47)$$

【0156】が得られる。さらに、(18)式より、

$$\{{}^{2m} \beta_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0157】

【数63】

$$\{{}^m \phi_0(ph)\}_{p=-\infty}^{\infty}$$

【0160】と

【0161】

【数65】

$$\{{}^m \phi_0(kh)\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

【0158】は、 $1/{}^{2m} B(f)$ に対する逆フーリエ
変換であるので、 ${}^m d_p$ は、

【0162】の畳み込み

【0159】

【0163】

【数64】

【数66】

$${}^m d_p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^{2m} \beta_{p-k} {}^m \phi_0(kh), \quad (48)$$

【0164】で与えられる。(9)式より、

【0165】

【数67】

$$|k| > [(m-1)/2]$$

【0166】のとき ${}^m\phi_0(kh) = 0$ なので、(42)

$${}^1\psi_0(t) = \begin{cases} 1/h, & |t/h| < 1/2, \\ 0, & |t/h| \geq 1/2, \end{cases} \quad (49)$$

【0168】2. $m \geq 2$ のとき、以下の関係を満たす mW と mW ($0 < {}^mW < \infty$, $0 < {}^mW < 1$)が存在する。

$$|{}^m\psi_0(t)| \leq \frac{{}^mW}{h} ({}^mW)^{|t|/h}. \quad (50)$$

【0170】上述した補助定理4は、次のように証明される。 $m=1$ のとき、(13)式および(14)式より、

$${}^1\psi_0(t) = {}^1\phi_0(t) = \frac{1}{h} {}^1\psi_0(t) \quad (51)$$

【0172】となる。したがって、(35)式から、(49)式が導かれる。また、 $m \geq 2$ のとき、(42)式より、

$$|{}^m d_p| \leq \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} |{}^{2m}\beta_{p-k}| |{}^m\phi_0(kh)| \quad (52)$$

【0174】となる。 A_m を

【0175】

$$A_m = m \sum_{p=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^p}{p! (m-p)!} (m/2 - p)^{m-1}, \quad (53)$$

【0176】とし、(9)式

【0177】

$${}^m\phi_0(t) = 0, \quad |t/h| \geq m/2, \quad (54)$$

【0178】を利用すると、Bスプライン関数 ${}^m\phi_0(t)$ は、

$$0 < {}^m\phi_0(t) \leq \frac{A_m}{h}, \quad |t/h| < m/2 \quad (55)$$

【0180】を満足するため、

【0181】

$$|{}^m d_p| \leq \frac{A_m}{h} \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} |{}^{2m}\beta_{p-k}| \quad (56)$$

【0182】が得られる。また、($0 < {}^{2m}b < 1$, $0 < {}^{2m}b < \infty$)を満たす定数 ${}^{2m}b$ 、および ${}^{2m}B$ に対して、 ${}^{2m}\beta_p$ は、

$$|{}^{2m}\beta_{p-k}| \leq h ({}^{2m}B) ({}^{2m}b)^{|p|} \quad (57)$$

【0184】を満足する。ここで、 ${}^{2m}B$ は h で正規化されている。このとき、 $|{}^m d_p|$ の上界は、

式が導出される。次に、 A/D 関数の上界を導出する。

(補助定理4) :

1. $m=1$ のとき、

【0167】

【数68】

【0169】

【数69】

【0171】

【数70】

【0173】

【数71】

【数72】

【数73】

【0179】

【数74】

【数75】

【0183】

【数76】

【0185】

【数77】

$$\begin{aligned}
 |{}^m d_p| &\leq \frac{A_m}{h} \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} h ({}^{2m} B) ({}^{2m} b)^{|p-k|} \\
 &\leq A_m \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} ({}^{2m} B) ({}^{2m} b)^{p-k}
 \end{aligned} \quad (58)$$

【0186】によって与えられる。 ${}^m D$ および ${}^m d$ をそれぞれ、

$$\begin{aligned}
 {}^m D &= \frac{\{({}^{2m} b)^{-[(m-1)/2]} - ({}^{2m} b)^{[(m-1)/2]+1}\}}{1 - ({}^{2m} b)} A_m ({}^{2m} B), \\
 {}^m d &= {}^{2m} b
 \end{aligned} \quad (59)$$

【0188】とすると、上界は、

【数79】

【0189】

$$|{}^m d_p| \leq {}^m D ({}^m d)^{|p|}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (60)$$

【0190】となる。ここで、 $0 < {}^m d < 1$ 、 $0 < {}^m D < \infty$ である。(12)式よりBスプライン関数は対称であるので、(13)式および(14)式から ${}^m \psi$

$0(t)$ も対称であることが導かれる。

【0191】

【数80】

$${}^m \psi_0(t) = {}^m \psi_0(|t|). \quad (61)$$

【0192】したがって、(50)式が成立することを示すには $t \geq 0$ のみについて考慮すればよいことになる。(54)式および(55)式より、 $|{}^m \psi_0(t)|$

$|$ の上界は次式によって与えられる。

【0193】

【数81】

$$\begin{aligned}
 |{}^m \psi_0(t)| &\leq \frac{A_m}{h} \sum_{p=[t/h-m/2]}^{[t/h+m/2]} |{}^m d_p| \\
 &\leq \frac{A_m ({}^m D)}{h} \sum_{p=[t/h-m/2]}^{[t/h+m/2]} ({}^m d)^{|p|}.
 \end{aligned} \quad (62)$$

【0194】さらに、 $0 < {}^m d < 1 < {}^m d^{-1}$ という関係から、(62)式は、

【0195】

【数82】

$$\begin{aligned}
 |{}^m \psi_0(t)| &\leq \frac{A_m ({}^m D)}{h} \sum_{p=[t/h-m/2]}^{[t/h+m/2]} ({}^m d)^{|p|} \\
 &\leq \frac{A_m ({}^m D) \{({}^m d)^{t/h-m/2} - ({}^m d)^{t/h+m/2+1}\}}{h(1 - ({}^m d))},
 \end{aligned} \quad (63)$$

【0196】と変形できる。 ${}^m W$ と ${}^m w$ を、

【数83】

【0197】

$$\begin{aligned}
 {}^m W &= \frac{A_m ({}^m D) \{({}^m d)^{-m/2} - ({}^m d)^{m/2+1}\}}{(1 - ({}^m d))}, \\
 {}^m w &= {}^m d,
 \end{aligned} \quad (64)$$

【0198】と定義すると、 $|{}^m \psi_0(t)|$ の上界は、

【0200】によって与えられる。したがって、

【0201】

【数85】

【0199】

【数84】

$$|{}^m \psi_0(t)| \leq \frac{{}^m W}{h} ({}^m w)^{|t|/h}$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$

【0202】に対して(50)式が成立する。補助定理4より、 $m=1$ の場合、 ${}^m \psi_0$ のサポートは有限である

ため打ち切る必要はない。 $m \geq 2$ の場合、 $|\mathfrak{m}_* \psi_k(t)|$ は $|t|$ が増加するとともに指数関数的に減少していき、 $|\mathfrak{m} \psi_k(t)|$ の上界も指数関数的に減少していくので、サポート幅を大きくとれば、打ち切りにより生じる誤差も急速に減少していくことが期待される。

【0203】 $2 \leq m \leq 10$ の各クラスに対して定数 $\mathfrak{m}U$ 、 $\mathfrak{m}u$ 、 $\mathfrak{m}W$ 、 $\mathfrak{m}w$ を求めた結果を図6に示す。こ

$$\left(\frac{\|\tilde{v} - v\|_{L_2}}{\|x\|_{L_2}} \right)^2 \leq - \frac{T(\mathfrak{m}W)^2(\mathfrak{m}w)^{2H}}{h^2 \ln(\mathfrak{m}w)} \quad (65)$$

【0206】が成立する。定理1は次のようにして証明される。(22)式、(23)式、(32)式より、

$$\begin{aligned} \|\tilde{v} - v\|_{L_2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\mathfrak{m} \tilde{\psi}_0(t - kh)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\mathfrak{m} \psi_0(t - kh)} dt \right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T x(t) \overline{\mathfrak{m} \tilde{\psi}_0(t - kh)} dt - \int_0^T x(t) \overline{\mathfrak{m} \psi_0(t - kh)} dt \right|^2 \end{aligned} \quad (66)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T x(t)^2 dt \right) \left(\left| \int_0^T \overline{\mathfrak{m} \tilde{\psi}_0(t - kh)} - \overline{\mathfrak{m} \psi_0(t - kh)} dt \right|^2 \right). \quad (67)$$

【0208】(67)式は、コーシー・シュワルツの不等式

$$\forall f, \forall g \in L_2[0, T] \quad (68)$$

$$\left(\int_0^T f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^T g(t)^2 dt \right) \quad (69)$$

【0210】を(67)式に適用することで導出される。したがって、

$$\left(\frac{\|\tilde{v} - v\|_{L_2}}{\|x\|_{L_2}} \right)^2 \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{(N-1)h} \left| \overline{\mathfrak{m} \tilde{\psi}_0(t - kh)} - \overline{\mathfrak{m} \psi_0(t - kh)} \right|^2 dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kh}^{(N-1-k)h} \left| \mathfrak{m} \tilde{\psi}_0(t) - \mathfrak{m} \psi_0(t) \right|^2 dt \end{aligned} \quad (71)$$

$$= - \frac{(N-1)(\mathfrak{m}W)^2(\mathfrak{m}w)^{2H}}{h^2 \ln(\mathfrak{m}w)}, \quad (72)$$

【0212】となる。最後に、 $T = (N-1)h$ としてこれを(72)式に代入することで、(65)式が導出される。これにより、

【0213】

【数90】

$$\frac{\|\tilde{v} - v\|_{L_2}}{\|x\|_{L_2}}$$

【0214】の上界は、打ち切り幅Hの関数として表せ

の結果から、 $m \geq 3$ に関しては低次のクラスの方が高次に比べ収束速度が速いことが確認できる。次に、上述した補助定理を用いて、サポートの打ちきりにより生じる相対的な近似誤差の上界を導出する。

【0204】(定理1)： $m \geq 2$ の場合、

【0205】

【数86】

【0207】

【数87】

【0209】

【数88】

【0211】

【数89】

ることが明らかとなった。次に、定理1を用いて、

【0215】

【数91】

$$\frac{\left[\int_0^T |\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\|x\|_{L_2}}$$

【0216】の上界を導出する。

(定理2)： $m \geq 2$ のとき、

【0217】

【数 9 2】

$$\frac{\left[\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\left[\int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}}$$

【0218】の上界 $E(H)$ は次式によって与えられる。

【0219】

【数 9 3】

$$\{E(H)\}^2 = \frac{T^2 ({}^mU)^2 ({}^mW)^2}{h^2 \ln({}^mu)({}^mw)} \left\{ ({}^mu)^H + ({}^mw)^H \sqrt{1 - ({}^mu)} \right\}^2. \quad (73)$$

【0220】定理 2 は、次のようにして証明される。

(26) 式と (33) 式より、

【0221】

【数 9 4】

【0222】は次のように表すことができる。

【0223】

【数 9 5】

$$\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt$$

$$\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \quad (74)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_k {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m\psi_0(t - kh) \right|^2 dt \\ &= \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(\tilde{v}_k - v_k) {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \{ {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh) \} \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) | + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\ &= \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) | \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh) | \right\} dt. \quad (75) \end{aligned}$$

【0224】ここで、ヘルダーの不等式

【数 9 6】

【0225】

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|a_k \cdot b_k|) \leq \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2} \quad (76)$$

【0226】を適用すると、(75) 式は以下のようになる。

【0227】

【数 9 7】

$$\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \quad (77)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k|^2 \right\} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2 \right\} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 \right\} dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k|^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2} dt \end{aligned} \quad (78)$$

【0228】さらに、ヘルダーの積分における不等式

【数98】

【0229】

$$\forall f, \forall g \in L_2[0, T]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}$$

【0230】を(78)式の第3項に適用することで、

【数99】

【0231】

$$\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \quad (79)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\tilde{v} - v\|_{l_2}^2 \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2 dt \\ &\quad + \|v\|_{l_2}^2 \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt \\ &\quad + 2 \|\tilde{v} - v\|_{l_2} \|v\|_{l_2} \sqrt{\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2 dt} \\ &\quad \cdot \sqrt{\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt} \end{aligned} \quad (80)$$

【0232】となる。一方、(80)式の

【0234】は次のように変形できる。

【0233】

【0235】

【数100】

【数101】

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2 dt \\ &\quad \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh)|^2 dt \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kh}^{(N-1-k)h} |{}^m\tilde{\psi}_0(t)|^2 dt \leq -\frac{T({}^mU)^2 \{1 - ({}^mu)^{2H}\}}{\ln({}^mu)}. \quad (82)$$

【0236】補助定理1より、

【0238】の上界は、

【0237】

【0239】

【数102】

【数103】

$$\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt$$

$$\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\bar{\psi}_0(t-kh) - {}^m\psi_0(t-kh)|^2 dt \quad (83)$$

$$\leq -\frac{h(N-1)({}^mU)^2({}^mu)^{2H}}{\ln({}^mu)} \quad (84)$$

$$= -\frac{T({}^mU)^2({}^mu)^{2H}}{\ln({}^mu)}. \quad (85)$$

【0240】で与えられる。さらに、(22)式および
(23)式と補助定理4より、 $\|v \rightarrow\|_2$ の上界は次
のようにして求まる。

【0241】

【数104】

$$\begin{aligned} \|v\|_{l_2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} dt \right|^2 \quad (86) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T |x(t)| |{}^m\psi_0(t-kh)| dt \right\}^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T |x(t)| dt \right\} \left\{ \int_0^T |{}^m\psi_0(t-kh)|^2 dt \right\} \\ &= \|x\|_{L_2}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T |{}^m\psi_0(t-kh)|^2 dt \right\} \\ &\leq \|x\|_{L_2}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2|t-kh|/h} dt \\ &= \|x\|_{L_2}^2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^0 \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2(t-kh)/h} dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^{kh} \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{-2(t-kh)/h} dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{N-2} \int_{kh}^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2(t-kh)/h} dt + \sum_{k=N}^{\infty} \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{-2(t-kh)/h} dt \right\} \\ &= \frac{\|x\|_{L_2}^2 ({}^mW)^2 h(N-1)}{h^2 \ln({}^mw)} \\ &= \frac{\|x\|_{L_2}^2 ({}^mW)^2 T}{h^2 \ln({}^mw)}. \quad (87) \end{aligned}$$

【0242】(82)式、(85)式および(87)式
を(80)式に適用し、定理1を用いると、

【0243】

【数105】

$$\begin{aligned} \int_0^T |\bar{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \quad (88) \\ \leq \frac{({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H} T \|x\|_{L_2}^2}{h^2 \ln({}^mw)} \cdot \frac{({}^mU)^2 T \{1 - ({}^mu)^{2H}\}}{\ln({}^mu)} \\ + \frac{({}^mW)^2 T \|x\|_{L_2}^2}{h^2 \ln({}^mw)} \cdot \frac{T({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H}}{\ln({}^mu)} \\ + 2 \sqrt{\frac{-({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H} T}{h^2 \ln({}^mw)}} \cdot \|x\|_{L_2} \cdot \sqrt{\frac{-({}^mW)^2 T}{h^2 \ln({}^mw)}} \cdot \|x\|_{L_2} \\ \cdot \sqrt{\frac{-({}^mU)^2 \{1 - ({}^mu)^{2H}\} T}{\ln({}^mu)}} \cdot \sqrt{\frac{-({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H} T}{\ln({}^mw)}} \\ = \frac{T^2 ({}^mU)^2 ({}^mW)^2}{h^2 \ln({}^mu) \ln({}^mw)} \cdot \left\{ ({}^mu)^H + ({}^mw)^H \sqrt{1 - ({}^mu)^{2H}} \right\}^2 \cdot \|x\|_{L_2}^2 \quad (89) \end{aligned}$$

【0244】となり、サポートの打ち切りにより生じる

誤差は(73)式によって得られる。定理2から、許容

誤差を $E(H)$ とした場合に必要なサポート幅 $h \cdot H$ を (89) 式で求めることができる。図 7 は、 $T=3600 \text{ sec}$ 、そしてサンプリング間隔を CD オーディオデータに相当する $h=44.1 \text{ kHz}=22.7 \mu \text{ sec}$ としたときのサポートの打ち切りにより生じる誤差 ($20 \log_{10} E(H)$) を示したものである。図 7 より、打ち切り誤差を -100 dB に抑えるには、 $m=2$ で $H \geq 31$ 、 $m=4$ で $H \geq 50$ 、 $m=7$ で $H \geq 89$ となる。したがって、 A/D 関数、 D/A 関数のサポート幅は最低で、

・ $m=2$ のとき $h \cdot H=22.7 \times 31=703.3 \mu \text{ sec}$ 、

・ $m=4$ のとき $h \cdot H=22.7 \times 50=1135.0 \mu \text{ sec}$ 、

・ $m=7$ のとき $h \cdot H=22.7 \times 89=2020.3 \mu \text{ sec}$ 、

必要となる。クラスが高次になるにつれ、 A/D 関数と D/A 関数の収束速度が遅くなるため、近似精度を保つためには高次クラスほどそのサポート幅を大きくとる必要がある。

【0245】 (2) 双直交性を保つ離散フルーエンシ関数の定義

実システムを構築するためには、フルーエンシ関数のサ

$${}^m\psi_0(t) \equiv \sum_{j=-m+1}^{m-1} b_m(j) {}^m\phi\left(t + \left(\frac{m}{2} - \frac{j}{2}\right)h\right). \quad (90)$$

【0249】 ${}^m\psi_l(t)$ は B スプライン関数の線形結合で表現されているため、B タイプの D/A 関数と同様に、以下の (91) 式に示すシフト不変性、および以下

$${}^m\psi_l(t) = {}^m\psi_0(t - lh) \quad (91)$$

$${}^m\psi_l(t) = {}^m\psi_l(2lh - t) \quad (92)$$

【0251】 形状も $m=1$ 、 $m=2$ においては C タイプと B タイプの D/A 関数は一致し、それぞれ方形波、三角波となっている。唯一異なっている点は、C タイプの D/A 関数のサポートが $3 < m < \infty$ においてコンパクトな点である。 $b_m(j)$ [$j=-m+1, \dots, m-1$] は、

【0252】

【数108】

$$\begin{aligned} \sum_{j=-m+1}^{m-1} 2a_m(2k-j)b_m(j) &= \delta(k), \\ \sum_{j=-m+1}^{m-1} a_m(2k-j)b_m(j) &= \frac{1}{2}\delta(k), \end{aligned} \quad (93)$$

$$k = -m+1, \dots, m-1.$$

【0255】 $a_m(j)$ は、

【0256】

ポートを有限区間とする必要がある。そのため、単純にサポートを打ち切ることで関数を有限区間とした場合に生じる近似誤差について上述したように検討した。次に、関数を単に打ち切るのではなく、 A/D 関数と D/A 関数の間で双直交性が成立するように有限化し、新たに離散化された A/D 関数と D/A 関数を定義する。

【0246】 サポートを有限区間とした場合にも A/D 関数と D/A 関数の間で双直交性が成立するよう、新たに離散化された A/D 関数と D/A 関数を定義する。この目的のため、すでに導出されている D/A 関数を利用する。以後、この関数を C タイプと称することとし、上述した説明において定義した関数系を B タイプと称することとして両者を区別する。以下、C タイプのフルーエンシ関数系の概説を行うとともに、C タイプを用いた理由についても説明する。以後、特に断りのない限り、フルーエンシ関数系と記した場合は C タイプを意味するものとする。

【0247】すでに導出されているクラス m の D/A 関数 ${}^m\psi_k(t)$ は信号空間 mS を張る基底であり、次のように $(m-1)$ 次のスプライン関数の線形結合の形で定義されている。

【0248】

【数106】

の (92) 式に示す lh に対する対称性が成立する。

【0250】

【数107】

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

【0253】としたとき、次の関係を満足する係数列として導かれる。

【0254】

【数109】

【数110】

$$\Phi_m(z) \equiv \sum_{-m+1}^{m-1} {}^m\phi_0(t)z^k, \quad (94)$$

$$H_m(z) \equiv \left(\frac{1+z^{-1}}{z} \right)^m, \quad (95)$$

$$A_m(z) = H_m(z)\Phi_m(z), \quad (96)$$

$$A_m(z) \equiv \sum_{-m+1}^{m-1} \alpha_m(j)z^{-j}, \quad (97)$$

【0257】と定義したとき、(96)式と(97)式が等価になるように置かれた係数列である。 b_2 、 b_3 、 b_4 に関しては、それぞれ以下のように求められている。

【0258】

【数111】

$$\{b_2(i)\}_{i=-1}^1 = \{0, 1, 0\},$$

$$\{b_3(i)\}_{i=-2}^2 = \left\{0, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

$$\{b_4(i)\}_{i=-3}^3 = \left\{0, \frac{1}{6}, -\frac{8}{6}, \frac{20}{6}, -\frac{8}{6}, \frac{1}{6}, 0\right\}.$$

【0259】高次クラスの ${}^m\phi_0(t)$ ほどサポートが大きく、最終的には

【0260】

【数112】

$${}^\infty\psi_0(t)$$

【0261】は無限区間サポートを持つ sinc 関数、すなわち、

【0262】

【数113】

$$\frac{\sin \pi f t}{\pi f t}$$

【0263】となる。この点もBタイプと一致する。 $h=1$ とした場合の $m=3$ と $m=4$ についてのCタイプのD/A関数をそれぞれ図8(a)と図8(b)に示す。次に、本発明のデータ処理方法において、Cタイプフルーエンシ関数系を用いる理由について説明する。計算機のメモリ資源は有限であるため、実装するフルーエンシ関数系を選択する必要がある。本発明のデータ処理方法では、信号を効率よく記述できる関数系として低次クラスのフルーエンシ関数に特に注目している。

【0264】空間 mS に属する微分可能な信号は、クラス m あるいはそれ以上のクラスのフルーエンシ関数で記述することが可能であるが、高次になるほど滑らかさの差異が減少する。したがって、滑らかさを表現するにあ

たっては $m=3$ および $m=4$ 程度のフルーエンシ関数を用いれば十分可能であり、これと $m=1$ と $m=2$ のフルーエンシ関数を合わせて用いることで微分不可能な信号、尖った信号、滑らかな信号を幅広く表現できると考えられる。一方、CタイプのD/A関数に関しては低次クラスほどそのサポート幅がコンパクトであるため、近似に必要な演算量、メモリ量等のコストも同時に押さえることが可能であり、実装上非常に優れた性質を持ちあわせている。以上の理由から、本発明においてはCタイプフルーエンシ関数系を用いる。

【0265】コンパクトであるというCタイプフルーエンシD/A関数の特性を活かした応用例として不均等補間が考えられる。離散信号を補間する場合、データ点は、通常何らかの標準化関数（従来では sinc 関数が多く利用されている）と畳み込まれる。標準化関数は離散化幅の間隔で時間軸と交差するという特性を持つため、データ点を標準化関数と畳み込むことでデータ点を補間できる。しかし、不均等な間隔で離散化された信号の場合、標準化関数が時間軸と交差する点を標本点にあわせて伸長し、それをデータ点と畳み込むだけでは滑らかな補間を行うことはできない。これはデータ点の時間情報が反映されないためである。すなわち、補間する位置に対して時間的に離れたデータ点は近くに位置するデータ点よりも影響が小さいことを考慮する必要がある。したがって、不均等間隔で離散化されたデータ点に対してそれらが均等な間隔で並び替えられた場合の値を予測し、これを擬似的なデータ点（以後、これを「擬似サンプル点」と称する）として補間を行うことが考えられる。このときサポート幅が大きい標準化関数に対しては求める擬似サンプル点も多くなるため、コンパクトなサポートを持つCタイプフルーエンシD/A関数が適している。

【0266】 $x \rightarrow t_j = j h' : (j=0, 1, \dots, d-1)$ で離散化されている d 次の離散周期信号

【0267】

【数114】

$$x = (x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{d-1}))^T, x(t_d) = x(t_0) \quad (98)$$

【0268】であるとしたとき、これを n 個の離散化された D/A 基底

【0269】

【数115】

$${}^m\hat{\psi}_k, (k=0, 1, \dots, (n-1))$$

【0270】で近似することを考える。すなわち、 $r =$

$${}^m\hat{\psi}_0 = \begin{bmatrix} {}^m\psi_0(t_0) \\ {}^m\psi_0(t_1) \\ {}^m\psi_0(t_2) \\ \vdots \\ {}^m\psi_0(t_{d-1}) \end{bmatrix} \quad (99)$$

【0272】となる。また、 $x \rightarrow$ は周期信号であるので、(数115)に示した D/A 基底はつぎのように r k だけ巡回させた次数 d の列ベクトルとなる。

$${}^m\hat{\psi}_k = \Omega^{rk} {}^m\hat{\psi}_0 \quad (100)$$

【0274】ここで、 Ω とは、

【0275】

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{d \times d} \quad (101)$$

【0276】である。(数115)で示した D/A 基底が列ベクトルを構成する行列

【0277】

【数119】

$${}^m\hat{\Psi} = [{}^m\hat{\psi}_0 | {}^m\hat{\psi}_1 | {}^m\hat{\psi}_2 | \dots | {}^m\hat{\psi}_{n-1}], \quad (102)$$

【0280】と定義すると、 $x \rightarrow$ を近似することは次の誤差関数

$$(\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}\boldsymbol{\alpha})^T (\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}\boldsymbol{\alpha}) \quad (103)$$

【0282】を最小化する展開係数

【0283】

【数122】

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})^T$$

【0284】を求める問題となる。(数120)で示した行列とその働きを図9に示す。図9において、ベクトル $s \rightarrow$ は、(数120)で示した行列による $x \rightarrow$ の最小二乗近似である。図9に示すように、(数120)で示した行列は n 次の展開係数列を r ($= d/n$) 倍に展開するため、これをクラス m のアップサンプリング基底行列と呼び、(数120)で示した行列において列を構成する離散化された D/A 基底 (数115) で示した D/A 基底) をアップサンプリング基底ベクトルと呼ぶこ

d/n としたときに、 $h = h' \cdot r$ の間隔でサンプリングする ${}^m\psi_0$ について考える。したがって、(数115)に示した D/A 基底は h' の間隔で離散的に生成された d 次の D/A 関数

【0271】

【数116】

【0273】

【数117】

【数118】

【0278】を

【0279】

【数120】

【0281】

【数121】

ととする。また、(数115)で示した D/A 基底がアップサンプルする割合 r を近似レートと呼ぶこととする。これに対して、近似レート r のダウンサンプリング基底行列

【0285】

【数123】

$${}^m\hat{\Psi}_*$$

【0286】とは、上述した(103)式を最小にする展開基底を生成するものである。(数123)に示したダウンサンプリング基底行列を用いて、(103)式で表された誤差関数を書き直すと、

【0287】

【数124】

$$\|x - {}^m\hat{\Psi}^m\hat{\Psi}x\| \quad (104)$$

【0288】となり、これは

【0289】

【数125】

$$\|x - {}^m\hat{\Psi}^m\hat{\Psi}x\| \leq \|I - {}^m\hat{\Psi}^m\hat{\Psi}\|_F \|x\|,$$

【0290】という関係を満たす。ここで、 $\|\cdot\|_F$ は

$$\|I - {}^m\hat{\Psi}^m\hat{\Psi}\|_F \quad (105)$$

【0292】上述した(数123)で示したダウンサンプリング基底行列は、(数120)で示した行列の疑似逆行列

$${}^m\Psi = {}^m\hat{\Psi}^{-1} = ({}^m\Psi^T {}^m\Psi)^{-1} {}^m\Psi^T \quad (106)$$

【0294】を解くことで容易に求められる。第一行を

【0295】

【数128】

$${}^m\hat{\psi}_0^T$$

【0296】とすると、他のすべての行ベクトルは

【0297】

$${}^m\hat{\psi}_k = \Omega^{rk} {}^m\hat{\psi}_0 \quad (107)$$

【0300】したがって、(数127)で示した疑似逆行列は、

【0301】

【数131】

$${}^m\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} {}^m\hat{\psi}_0^T \\ {}^m\hat{\psi}_1^T \\ {}^m\hat{\psi}_2^T \\ \vdots \\ {}^m\hat{\psi}_{n-1}^T \end{bmatrix}$$

【0302】となる。ダウンサンプリング基底行列とその働きを図10に示す。図10は、(数131)に示したダウンサンプリング基底行列が次数dの信号から次数nの展開係数を生成する様子を示している。実際に疑似逆行列を求めた結果得られた $m=2$ 、 $m=3$ のダウンサンプリング基底ベクトルの特性を図11に示す。図11(a)は $m=2$ の場合であり、図11(b)は $m=3$ の場合である。また、図11に示す特性は、 $h=1$ として得られたものである。図11では、対象信号の次数dと基底ベクトルの数nによってダウンサンプリング基底ベクトルの形状が少しずつ変化している様子が示されている。nとdを十分大きくすると、ダウンサンプリング基底ベクトルの特性は収束する。

【0303】次に、上述したダウンサンプリング基底ベクトルおよびアップサンプリング基底ベクトル(以後、これらを一対で「フルーエンシベクトル」と称する)を

フロベニウスノルムを意味する。 $x \rightarrow$ が任意に選ばれた正規化されたベクトルであれば、最適なダウンサンプリング基底行列は、次式を最小にするものとなる。

【0291】

【数126】

【0293】

【数127】

$${}^m\hat{\psi}_0$$

【0298】を巡回させた形式で表すことができる。

【0299】

【数130】

用いて実データを近似するための方法について説明し、フルーエンシベクトルを実データに適用した場合の近似結果について説明する。

【0304】近似対象データの大きさに応じてフルーエンシベクトルを導出するのは効率が悪いので、近似対象データの次数 d' に対して、次数 d ($\leq d'$)の信号をレート r で近似することを仮定する。例えば、 $d=512$ 、 $r=4$ と仮定したとき、アップサンプリング基底行列を $d/r=128$ のアップサンプリング基底ベクトルから構成し、これに対応する疑似逆行列を求めることでダウンサンプリング基底行列を求める。

【0305】このようにして求められたダウンサンプリング基底行列とアップサンプリング基底行列をそのまま d 次のブロック毎に対象信号に適用し近似することも考えられるが、本発明のデータ処理方法では、ブロックノイズを防ぐためにダウンサンプリング基底行列から最も対称性の高いダウンサンプリング基底ベクトル

【0306】

【数132】

$${}^m\hat{\psi}_{d/(2n)}$$

【0307】を1つ選択し、これを r ずつシフトしながら展開係数を得る(図12参照)。このようにして得られた展開係数は、その各要素間に $r-1$ 個のゼロを埋め込み、 r ずつずらしながらアップサンプリング基底ベクトルとの畳み込みを行うことで展開される。前処理とし

ては、対称信号の直流成分が0となるようにゼロ平均をとった。

【0308】次に、上述した方法に基づいて2つのCDオーディオデータ（44.1kHz、16ビット、モノラル、441000サンプル（10秒分））を近似した結果を説明する。対象とした曲は以下のとおりである。

曲1. Donald Fagen. Trans-island Skyway.

曲2. J.S.Bach. チェロ・ソナタ第3番ト長調. Misc ha Maisky・Martha Argerich演奏。

【0309】上述した曲1は高周波を多く含む信号、そして曲2は滑らかな成分を多く含む信号の代表として選曲した。近似に使用したフルーエンシベクトルのパラメータは次に示す通りである。

・クラス： $m=1, 2, 3, \infty$

・次数： $d=512$ （ $m=\infty$ の場合のみ、 $d=512$ および24000）

・近似レート： $r=2, 4$

・計算精度：倍精度。

【0310】本発明のデータ処理方法においては、フルーエンシ関数系の中でも特に低次クラスに注目していることは上述したとおりである。そこで、低次クラスの有

$$SN \text{ 比} = -20 \log_{10} \sum \frac{(\text{対象信号} - \text{近似信号})^2}{(\text{対象信号})^2} [dB]$$

【0313】図14に示すように、従来法（ $m=\infty$ ）は必ずしもよい近似を与えていない。 $m=\infty$ のフルーエンシ関数が無限区間サポートを持つため、特に $d=512$ のとき近似結果に与える影響が大きく、低次クラスと同等の近似精度を得るためには、フルーエンシ関数の次数は少なくとも 10^4 のオーダー程度が必要であることが確認できる。全体的な傾向としては、曲1における近似精度は各クラスのフルーエンシベクトルともあまり差が見られないが、曲2では $m=\infty$ を除いて、高次クラスほどSN比が高くなっている。これは、曲1が高周波成分を多く含むためであると考えられる。しかし、信号の性質は時間とともに変化していることを考慮した場合、クラス $m=3$ のフルーエンシベクトルが全区間において最適な近似を与えるとは断定できない。

【0314】次に、クラスの差異が明確である曲2を小区間に分割し、同様の近似を行った結果について説明する。図15は、曲2を151番目から350番目の200サンプル（区間1）と20351番目から20550番目の200サンプル（区間2）、および全区間に対して $r=2$ で近似した結果を示したものである。また、図16は、曲2を151番目から350番目の200サンプル（区間1）と20351番目から20550番目の200サンプル（区間2）、および全区間に対して $r=4$ で近似した結果を示したものである。図15および図16に示すように、近似レート $r=2$ 、 $r=4$ のいずれにおいても、区間1ではクラス $m=1$ がよい近似を与え

用性を検証するため、高次クラスの代表として、従来のレート変換法において理想ローパスフィルタとして応用されているクラス $m=\infty$ のフルーエンシベクトルに関しても近似を行い比較した。従来法との比較という意味も兼ね、クラス $m=\infty$ に関しては通常行われているダウンサンプル/アップサンプル操作を適用した。その方法は次の通りである。まず、無限区間サポートを持つ理想ローパスフィルタ（クラス $m=\infty$ のフルーエンシA/D関数とD/A関数）を、ガウス窓を適用して有限化する。次に、エイリアシングが生じないように、この有限化されたローパスフィルタを対象信号に適用した後に $1/r$ に間引く。最後に、間引いた結果と有限化されたローパスフィルタとを畳み込むことで r 倍にアップサンプリングする（図13参照）。

【0311】曲1および曲2を近似した結果を図14に示す。図14は、各クラスおよび各近似レートにおける対象信号に対するSN比を示している。なお、SN比は次式に基づいて算出した。

【0312】

【数133】

ているのに対して、区間2ではクラス $m=3$ がよい近似を与えている。したがって、対象信号を最適に近似するフルーエンシベクトルは時間とともに変化していることが理解できる。

【0315】図17は、近似レート $r=2$ 、クラス $m=1, 2, 3$ のフルーエンシ関数による区間1に対する近似結果の詳細を示す図である。図17（b）が原波形、そして原波形（b）をそれぞれクラス $m=1, 2, 3$ のフルーエンシベクトルで近似した二乗誤差をデータ点毎に求めたものが図17（c）、図17（d）、図17（e）である。このうち最も小さい誤差を与えたクラスが図17（a）となっている。赤が $m=1$ 、緑が $m=2$ 、そして青が $m=3$ をそれぞれ表す。なお、明細書においては色を表現することができないため、図17および後述する図18、図27、図28、図29においては、赤を右上がりの斜線によるハッチング、緑を右下がりの斜線によるハッチング、青を水平線によるハッチングでそれぞれ表すこととする。

【0316】図18は、近似レート $r=2$ 、クラス $m=1, 2, 3$ のフルーエンシ関数による区間2に対する詳細な近似結果を示す図である。図18（b）が原波形、そして原波形をそれぞれクラス $m=1, 2, 3$ のフルーエンシベクトルで近似した二乗誤差をデータ点毎に求めたものが図18（c）、図18（d）、図18（e）である。このうち最も小さい誤差を与えたクラスが図18（a）となっている。赤が $m=1$ 、緑が $m=2$ 、そして

青が $m=3$ をそれぞれ表す。

【0317】図17および図18に示すように、区間1および区間2ともに、最適なフルーエンシベクトルのクラスは時間とともに変化していることが読み取れる。また区間1においては最適なフルーエンシベクトルがクラス $m=1$ である率が多く、区間2においては最適なフルーエンシベクトルがクラス $m=3$ である率が多い。上述した図15において、区間1ではクラス $m=1$ がよい近似を与えているのに対して、区間2ではクラス $m=3$ がよい近似を与えているのはこのためである。これらの結果から、信号の性質の変化に応じて最適なフルーエンシベクトルを用いることで、 $m=\infty$ 単一クラスで近似を行う従来法よりも近似精度を向上できることが理解できる。実際に各クラスのフルーエンシベクトルによって得られた近似値のうち、最も誤差の小さなものを選択した場合（最適近似）のSN比を図19に示す。比較のため、各単一クラスで近似した結果も記載する。

【0318】このように、双直交性が保持されるよう、離散化されたD/A関数と離散化されたA/D関数を定義し、この新たに定義した有限かつ離散化されたフルーエンシ関数であるフルーエンシベクトルを実データに適用した結果、最適な近似を与えるフルーエンシベクトル（最適なフルーエンシベクトル）が変化していることが明らかとなった。これは、フルーエンシベクトルには信号の局所的な性質の変化を捕らえる能力があることを示しており、信号の変化に応じて最もよい近似を与えるフルーエンシベクトルを選択することで、 $m=1$ 単一クラスで近似を行う従来法よりも近似精度が向上することを意味している。

【0319】(3) 離散データにおける最適クラスの決定方法

次に、離散データの属する信号空間を特定する方法およびその適用限界と特異点との関連について説明する。上述したように、対象信号の属する信号空間を特定することには様々な利点がある。第一に、多項式信号空間 \mathcal{M}_S に属する信号 $x(t)$ に対しては、クラス m のフルーエンシ関数を利用することで信号を効率的に記述できることが保証されているという利点が挙げられる。また第二

$$d_k(m, h) = \left\| x(t_k) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{m\psi_0(t - kh)} dt \right\| \quad (108)$$

【0327】としたとき

【0328】

【数137】

$$\operatorname{argmin}_m \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} d_k(m, h) = 0 \right\}$$

【0329】を求めることで、 $x(t)$ の属する空間クラスを特定できる。以後、(108)式を「クラス決定尺度」と称することとする。次に、上述したクラス決定尺度を基に、多項式信号空間 \mathcal{M}_S のいずれか一つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$:

に、フルーエンシ関数系 (Cタイプ) は低次クラスほどサポートが小さいため、信号 $x(t)$ に対してクラス m のフルーエンシ関数を用いることで、変換に要する演算量が最小となるという利点が挙げられる。したがって、信号の属するクラスを特定することで、計算機実装における演算量の低減が可能となる。また第三に、微分可能な点を特定することでオーバーシュートやアンダーシュート等のギブス現象を緩和できるという利点も挙げられる。

【0320】多項式信号空間 \mathcal{M}_S のいずれか1つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$:

($j=0, 1, 2, \dots$) で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定することが可能であれば、上述したようなフルーエンシ関数系がもたらす効果を離散データに対しても期待することができる。

【0321】次に、離散データにおける最適クラスの決定方法を説明する準備として、連続系において信号の属する空間を特定する尺度となる「クラス決定尺度」を定義する。上述した(6)式

【0322】

【数134】

$$v(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{m\psi_0(t - kh)} dt$$

【0323】および(7)式

【0324】

【数135】

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t_k) m\psi_k(t), s(t) \in \mathcal{M}_S$$

【0325】から、連続系における m の A/D 関数は、アナログ信号 $x(t)$ を幅 h で離散化した係数値 $v(t_k)$ を生成する。このとき、 $h \rightarrow 0$ (この場合に限り、「 h 」の右に記載された「 \rightarrow 」はベクトルの意を表すものではない) とすると、上式は信号 $s(t)$ に収束し、D/A関数を用いないで $x(t)$ の \mathcal{M}_S への射影が得られる。したがって、

【0326】

【数136】

($j=0, 1, 2, \dots$) で離散化した $x \rightarrow x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定する方法について説明する。ここで、原信号 $x(t)$ における1階微係数が存在しない点を特異点とし、原信号の特異点に最も近い点を離散信号の特異点とする。

【0330】連続系におけるクラス決定尺度が離散系に対しても有効であれば、離散信号の属するクラスを特定することが可能となる。そこで d 次の離散信号に対する離散クラス決定尺度を

【0331】

【数 138】

$$\hat{d}_k(h) = \|x(t_{r,k}) - (\mathbf{x}, {}^m\hat{\psi}_k)\|_{k=0,1,2,\dots,n-1} \quad (109)$$

【0332】と再定義する。ここで、

【0333】

【数 139】

$${}^m\hat{\psi}_k$$

【0334】は幅 h' で離散化されている d 次の離散信号を h でサンプリングするダウンサンプリング基底ベクトルである。このとき、近似レートは $r = h/h'$ であり、基底ベクトルの数は $n = d/r$ となる。クラス決定尺度の有効性を主張するためには、 mS に属する対象信号に対して、

【0335】

【数 140】

$$\min\{\hat{d}_k(h)\}$$

【0336】を与える最も低次クラスのダウンサンプリング基底ベクトルクラスとして m が得られればよい。そうでない場合でも、クラス m 以下のダウンサンプリング基底ベクトルが選択されなければ実用性に耐えうる。これはクラス m 以上のフルーエンシ関数が mS に属する信号を記述できるという性質を持つためである。

【0337】対象信号としては、

【0338】

【数 141】

$$\hat{d}_j(h) = \|x(t_j) - (\mathbf{x}, \Omega^{1-k} \cdot {}^m\hat{\psi}_0)\|_{j=0,1,2,\dots,d-1} \quad (110)$$

【0342】とし、

【0343】

【数 143】

$$D(h) = \sum_{k=0}^{d-1} \hat{d}_k(h)^2 / \mathbf{x}^2$$

【0344】を求め、クラス決定尺度の有効性を検証する。ここで、 Ω は上述した (101) 式に示すとおりである。なお、境界における不連続点が影響を及ぼさないよう、評価には中心の 512 点のみを用いた。 h に対して以上の条件の下で得られたクラス決定尺度 $D(h)$ の遷移を図 23～図 26 に示す。図 23 (a) は、上述したパターン 1 に示す 0 次関数 (特異点を含まない 0 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示しており、図 23 (b) は、上述したパターン 1 に示す 1 次関数 (特異点を含まない 1 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示している。また、図 24 (a) は、パターン 1 に示した 2 次関数におけるクラス決定尺度の遷移を示しており、図 24 (b) は、パターン 1 に示した正弦波におけるクラス決定尺度の遷移を示している。また、図 25 (a) は、上述したパターン 2 に示す 0 次関数 (特異点

 ${}^1S, {}^2S, {}^3S$, および ${}^\infty S$

【0339】に属する信号の例として微分可能性が既知である 0 次関数 (直流波)、1 次関数、2 次関数、そして正弦波を選択した。 1S および 2S に関しては、特異点を持つことが許されているので、0 次関数および 1 次関数に対しては特異点を持つ信号と特異点を持たない信号とを用意し、一貫性を持たせるため 2 次関数、正弦波に対してもこれに形状を合わせた。これらを図 20 にまとめる。図 20 に示すパターン 1 は、0 次関数および 1 次関数が特異点を持たない場合のパターンであり、パターン 2 は、0 次関数および 1 次関数が特異点を持つ場合のパターンである。また、図 20 に示したパターン 1 の信号を図 21 に、図 20 に示したパターン 2 の信号を図 22 にそれぞれ示す。

【0340】次に、クラス決定尺度の有効性について説明する。図 20 に示した関数のそれぞれに対応して、各関数につき 1024 点の離散データを生成し、各離散データに対してクラス $m=1$ から $m=4$ までを適用し、近似レート r を変えることで h を変化させる。このとき、結果にばらつきが生じないように全ての点に対しダウンサンプリング基底ベクトルを作用させる。すなわち、

【0341】

【数 142】

を含む 0 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示しており、図 25 (b) は、上述したパターン 2 に示す 1 次関数 (特異点を含む 1 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示している。また、図 26 (a) は、パターン 2 に示した 2 次関数におけるクラス決定尺度の遷移を示しており、図 26 (b) は、パターン 2 に示した正弦波におけるクラス決定尺度の遷移を示している。

【0345】クラス m 以上の A/D 関数はクラス m の信号を記述できることを考慮すると、クラス $m-1$ とクラス m のダウンサンプリング基底ベクトルが与えるクラス決定尺度の間に大きな差異が現れるはずである。図 23 (a) に示すように、0 次関数に対してはクラス間におけるクラス決定尺度に差異が現れていないが、他の対象信号におけるクラス決定尺度のオーダと比較しても値が小さいため、いずれのクラスのフルーエンシベクトルも対象信号を精度よく近似することを示している。したがって、0 次関数 (直流波) は 1S に属することが特定される。

【0346】また、図 23 (b) に示すように、1 次関数については小さい h ほどクラス決定尺度の差異が大きくなっており、クラス決定尺度を最も小さくするダウン

サンプリング基底ベクトルとして必ずクラス $m \geq 2$ が選択される。したがって、1 次関数は 2S に属することが特定できる。同様に、図 24 (a) および図 26 (a) に示すように、2 次関数においてもクラス決定尺度を最も小さくするダウンサンプリング基底ベクトルとして必ずクラス $m \geq 3$ が選択され、これより 2 次関数の属する空間を 3S と特定できる。また、図 24 (b) および図 26 (b) に示すように、正弦波に関しては 2 次関数ほどクラス間の差異が明らかではないが、クラス $m=3$ および $m=4$ がクラス決定尺度を最も小さくしているため、正弦波が滑らかな信号であることを特定できる。したがって、特異点を含まない信号に対してはクラス決定尺度に基づいたクラス決定方法が有効であると考えられる。

【0347】一方、図 25 (a) および図 25 (b) に示すように、特異点を含む場合には、0 次関数および 1 次関数とも特異点を含まない場合のクラス決定尺度と比較してそのオーダが大きく、差異もみられない。したがって、対象信号が特異点を含む場合、クラス決定尺度が有効であるとはいえず、離散系におけるクラス決定尺度は特異点を含まない信号にのみその有効性が確認された。

【0348】次に、上述したクラス決定尺度の有効性に基づいて離散信号のクラスを特定する方法について説明する。まず、対象信号をより正確に捕らえるため、 h を最も小さくする近似レート $r=2$ を用いる。そして各点に対してクラス決定尺度の値にばらつきが生じないように、すべてのデータ点に対してダウンサンプリング基底ベクトルを作用させ、上述した (110) 式におけるクラス決定尺度を求める。これを各クラスのダウンサンプリング基底ベクトルで行い、クラス決定尺度を比較し、クラス決定尺度を最も小さくするダウンサンプリング基底ベクトルのクラスを t_k におけるクラスとする。

【0349】この方法を適用した結果を図 27～図 29 に示す。図 27 は、上述した図 22 (a) に示した特異点を含む 0 次関数に対する結果である。図 27 (a) は対象信号となる 0 次関数を示し、図 27 (b) は、図 27 (a) に示した対象信号においてクラスを特定した結果を示している。また、図 28 は、上述した図 22 (b) に示した特異点を含む 1 次関数に対する結果である。図 28 (a) は対象信号となる 1 次関数を示し、図 28 (b) は、図 28 (a) に示した対象信号においてクラスを特定した結果を示している。また、図 29 は、0 次関数 (直流成分) から 1 次関数 (直線成分) に変化する関数に対する結果である。図 29 (a) は対象信号となる 0 次関数から 1 次関数に変化する関数を示し、図 29 (b) は、図 29 (a) に示した対象信号においてクラスを特定した結果を示している。

【0350】図 27～図 29 に示すように、特異点以外の場所では直流成分は 1S 、そして直線は 2S に属する

ことが特定されているが、特異点が存在する境界部分は 3S に属すると判定されている。特異点周辺では係数値およびクラス決定尺度に変動があると考えられる。この場合、特異点が周辺点に及ぼす影響の範囲は h が大きいほど広がるが、 h を十分小さくすることで、影響の範囲も収束する。特異点やその周辺点に対してクラス決定尺度は有効な値を与えないが、 h が十分小さければ、クラスが変化する部分として特異点を抽出することができる。

【0351】次に、上述したクラス決定方法を実データに適用した場合について説明する。対象データの大きさに応じてフルーエンシベクトルを導出するのは効率が悪いので、近似対象データの次数 d' に対して、次数 d ($\leq d'$) の信号をレート $r=2$ で近似することを仮定し、ダウンサンプリング基底行列を求める。そしてブロックノイズが生じないように、ダウンサンプリング基底行列から最も対称性の高いダウンサンプリング基底ベクトルを 1 つ選択し、これを 1 ずつシフトしながら作用させる。この様子を図 30 に示す。展開係数を得る場合は、図 30 (a) に示すように近似レートに応じてダウンサンプリング基底ベクトルを r ずつシフトさせながら $x \rightarrow$ との内積を求める。また、クラス決定尺度を求める場合は、図 30 (b) に示すように 1 ずつシフトしながら $x \rightarrow$ の全点に対してダウンサンプリングベクトルを作用させる。

【0352】次に、上述した方法に基づいて 2 つの CD オーディオデータ (44.1 kHz、16 ビット、モノラル、44100 サンプル (10 秒分)) を近似した結果を説明する。近似対象信号とした曲は、上述した「(2) 双直交性を保つ離散フルーエンシ関数の定義」において用いたものと同じであり以下のとおりである。

【0353】曲 1. Donald Fagen. Trans-island Skyway.

曲 2. J.S. Bach. チェロ・ソナタ第 3 番 ト長調. Misc. Maisky・Martha Argerich 演奏。

上述した曲 1 は高周波を多く含む信号、そして曲 2 は滑らかな成分を多く含む信号の代表として選曲した。近似に使用したフルーエンシベクトルのパラメータは次に示す通りである。利用したダウンサンプリング基底ベクトルは、上述した方法により生成した。パラメータは以下に示すとおりである。

- ・クラス： $m=1, 2, 3$
- ・次数： $d=512$
- ・近似レート： $r=2$ 。

【0354】以上の条件の下で上述した方法を用いて特定されたクラスのフルーエンシベクトルが生成した近似結果を選択した。これを手法 1 とし、単に最適な近似結果を選択する手法を手法 2 とし、両者を比較した結果を図 31～図 33 の第一列に示す。また、本手法によって特定された対象信号のクラスに変化があった点を特異点

とみなし、手法1、手法2、そして単一クラスで近似した結果のそれぞれからこの点を取り除き、SN比を比較した結果を図31～図33の第2列にそれぞれ示す。クラスの変化があった点を除去しない場合をパターンa、除去する場合をパターンbとする。図31～図33の各々は、対象信号を区間別に評価したものとなっており、図31は151番目から350番目のサンプル（区間1）、図32は20351番目から20551番目のサンプル（区間2）、そして図33は全点に対する結果である。

【0355】各手法のパターンbにおいて除去された点の数は図34に示す。区間1は高周波成分を多く含み、除去された点数の割合も77.5%と非常に多い。ダウンサンプリング基底ベクトルのサンプリング幅hは対象信号の離散化幅より小さくすることは出来ないため、クラスを正確に特定するためには対象信号の離散化幅を十分小さくする必要があるが、このように高周波成分の多い区間のクラスを特定するためには当初のサンプリング幅 $x(t_k)$ のサンプリング幅が大きすぎると考えられる。このため、特定されたクラスが変化する部分に特異点が存在するとは必ずしもいえず、パターンbにおいて本方法におけるSN比が最適な近似（手法2）と比較して大幅に劣化していると考えられる。

【0356】一方、区間2では、手法1、パターンaのSN比がクラス $m=3$ 単一のフルーエンシベクトルで近似したものと比較して低いものに対して、パターンbに対する手法1のSN比はほぼ同じとなっており、特異点の多くが除去されたものと考えられる（図33参照）。クラス $m=3$ のフルーエンシベクトルは特異点を含まない $1S$ および $2S$ に属する信号を完全に近似できるため、特異点を取り除かれることにより、パターンbに対する、手法1とクラス $m=3$ のフルーエンシベクトルによる近似が等しくなることは妥当であるといえる。また、このSN比はパターンbに対する手法2で得られたSN比に近づいていくことも納得できる。

【0357】全区間で除去された点数の割合が低いことを考慮すると、全区間の傾向としては細かいクラスの変動はなく、ダウンサンプリング基底ベクトルのサンプリング幅hが十分である区間が多いため、パターンbにおける手法1および手法2で得られたSN比が、クラス $m=3$ のフルーエンシベクトルによる近似とほぼ同等となったと予測される。

【0358】このように、フルーエンシ理論では、対象信号の属するクラスを特定することで信号を効率よく記述でき、また変換に要する演算量を低減できる。したがって、対象信号のクラスを特定することに大きな意義があると考え、多項式信号空間 M_S のいずれか1つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$ ：
 $(j=0, 1, 2, \dots)$ で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定する方法を提案した。

その準備として、まず連続系においてクラスの特異性を可能とするクラス決定尺度を離散信号に対して定義し、その有効性を検証した。この結果、離散系におけるクラス決定尺度は特異点を含まない信号に対してその有効性が確認された。またクラス $m=3$ 、 $m=4$ のフルーエンシベクトルはほとんど近似精度に差異がないことが判明した。離散系におけるクラス決定尺度の有効性を確認した上で、これに基づいたクラスの決定方法を提案した。この方法を微分可能性が既知である信号に適用した結果、クラスに変化のある境界部分が特異点の候補となることが判明した。実データに対しても本方法を適用した。クラス $m=1$ から $m=3$ のフルーエンシベクトルで近似した結果のうち、最も原波形との誤差が少ない近似結果を選択し、これに対して上述した方法によって検出された特異点の候補を取り除いたところ、高周波成分を多く含まない信号に対してはクラス $m=3$ 単一クラスで近似した結果とほぼ同等のSN比が得られた。クラス m 以上のフルーエンシベクトルは特異点を含まない M_S に属する信号を完全に近似できる。したがって、適用したフルーエンシベクトルのうち最も高次クラスの近似結果と同等のSN比が得られたということは、特異点の抽出に成功していると考えられる。一方、離散化幅に対して変化が著しい場合、十分にhが小さくないためクラスの特異性が困難であり、特異点の位置を抽出することが難しいことが判明した。結論としては、離散系においてはサンプリング幅hは対象信号の離散化幅 h' より小さくすることはできないため、 h' を十分小さくすれば、本方法による離散信号の属するクラスの決定方法は有効であるといえる。

【0359】このように、本発明のデータ処理方法は、時間軸上に局在する信号の構造を捕らえることができ、かつ不連続信号や特異点を持つ信号を効率よく記述することが可能であるという特徴を有するフルーエンシ関数系を用いており、サポートの打ち切りから生じる誤差の理論的評価を行い、双直交性を保つ離散フルーエンシ関数を新たに定義し、新たに定義した離散フルーエンシ関数を用いて離散データにおける最適クラスを決定する方法を提供している。したがって、従来の方法に比較してより高い近似精度で信号を記述することができるとともに、変換に要する演算量を低減することができる。

【0360】次に、上述した理論に基づいて構成されたデータ処理装置の具体例について説明する。図35は、一実施形態のデータ処理装置の構成を示す図である。図35に示すデータ処理装置は、入力されるアナログ信号を、 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間に含まれる出力データに変換する処理を行っており、入力部100およびデータ変換部110を含んで構成されている。

【0361】入力部100は、音声等に対応して連続的に変化するアナログ信号が入力され、所定のサンプリン

グ間隔でこのアナログ信号の瞬時値を読み取ってデジタルデータに変換する。すなわち、入力部 100 によって、従来から行われている δ 関数を用いたアナログ→デジタル (A/D) 変換が行われる。

【0362】データ変換部 110 は、入力部 100 から順次出力される複数のデジタルデータに対して、所定の変換関数の値を乗算し、各乗算結果を加算する。この変換関数としては、上述した A/D 関数 $m\psi_0(t)$ が用いられている。このように、図 35 に示したデータ処理装置を用いることにより、入力されるアナログ信号を、クラス m の多項式信号空間に含まれるデジタルデータに変換する処理を積分操作 (積和演算) によって行うことができる。したがって、アナログ信号の瞬時値をそのまま用いる場合に比べて、ノイズの影響を受けにくく、実用的な処理系を構成するにあたって非常に有用であるといえる。

【0363】図 36 は、他の実施形態のデータ処理装置の構成を示す図である。図 36 に示すデータ処理装置は、 $(m-1)$ 階微分可能なクラス m の多項式信号空間を考えた場合に、入力データが含まれる多項式信号空間のクラスを判定したり、この入力信号に含まれる特異点を抽出する処理を行っており、間引き処理部 200、補間演算部 210、誤差演算部 220、クラス判定部 230、特異点抽出部 240 を含んで構成されている。

【0364】間引き処理部 200 は、離散的な入力データに対して所定の間引き処理を行う。補間演算部 210 は、間引き処理がなされた後のデータに対して、クラス m の値が異なる複数のクラスのそれぞれに対応した補間関数を用いて補間演算を行う。この補間関数としては、上述した D/A 関数 $m\psi_0(t)$ が用いられている。誤差演算部 220 は、補間演算部によって得られた各クラス毎の補間データと間引き処理前のデータとの誤差をクラス毎に演算する。クラス判定部 230 は、誤差演算部 220 によって演算された誤差が最も小さい補間データに対応するクラスを判定する。特異点抽出部 240 は、クラス判定部 230 によって判定されたクラス m の値が変化する位置を、入力データの特異点として抽出する。

【0365】このように、図 36 に示したデータ処理装置を用いることにより、入力データが属するクラス m を判定することができる。また、クラス m が変化する部分を調べることにより、入力データに含まれる特異点を簡単に抽出することができる。特に、入力データに含まれる特異点を抽出し、隣接する特異点間のデータのクラス m を判定することにより、データの内容を効率よく解析することができ、データの近似等を行う場合の演算量を減らすことが可能になる。

【図面の簡単な説明】

【図 1】信号空間 M_S に属する信号の例を示す図である。

【図 2】対象信号が M_S に属する場合のフルーエンシモデルを説明する図である。

【図 3】対象信号が M_S に属さない場合のフルーエンシモデルを説明する図である。

【図 4】 $m=1$ および $m=2$ の場合の A/D 関数と D/A 関数の特性を説明する図である。

【図 5】 $m=3$ および $m=\infty$ の場合の A/D 関数と D/A 関数の特性を説明する図である。

【図 6】A/D 関数と D/A 関数における減衰パラメータを説明する図である。

【図 7】打ち切り幅 (H) に対する打ち切り誤差の上界 (E(H)) を説明する図である。

【図 8】 $h=1$ とした場合の D/A 関数の特性を示す図である。

【図 9】アップサンプリング基底行列を説明する図である。

【図 10】ダウンサンプリング基底行列を説明する図である。

【図 11】 $h=1$ とした場合のダウンサンプリング基底ベクトルの特性を示す図である。

【図 12】ダウンサンプリング基底ベクトルによる対象信号のダウンサンプリングについて説明する図である。

【図 13】通常のレート変換法について説明する図である。

【図 14】曲 1 および曲 2 に対する近似結果の SN 比を示す図である。

【図 15】近似レートを 2 として曲 2 を小区間に分割した場合の近似結果の SN 比を示す図である。

【図 16】近似レートを 4 として曲 2 を小区間に分割した場合の近似結果の SN 比を示す図である。

【図 17】曲 2 の区間 1 における原波形と近似結果の二乗誤差を示す図である。

【図 18】曲 2 の区間 2 における原波形と近似結果の二乗誤差を示す図である。

【図 19】各クラスにおける近似結果の SN 比と最適な近似結果の SN 比を示す図である。

【図 20】対象信号を説明する図である。

【図 21】図 20 に示したパターン 1 に属する対象信号を説明する図である。

【図 22】図 20 に示したパターン 2 に属する対象信号を説明する図である。

【図 23】図 20 に示したパターン 1 に属する 0 次関数 (特異点を含まない 0 次関数) およびしたパターン 1 に示す 1 次関数 (特異点を含まない 1 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示す図である。

【図 24】図 20 に示したパターン 1 に属する 2 次関数および正弦波におけるクラス決定尺度の遷移を示す図である。

【図 25】図 20 に示したパターン 2 に属する 0 次関数 (特異点を含む 0 次関数) および 1 次関数 (特異点を含

む 1 次関数) におけるクラス決定尺度の遷移を示す図である。

【図 26】図 20 に示したパターン 2 に属する 2 次関数および正弦波におけるクラス決定尺度の遷移を示す図である。

【図 27】図 22 に示した特異点を含む 0 次関数に対してクラス決定尺度に基づいてクラス特定を行った結果を示す図である。

【図 28】図 22 に示した特異点を含む 1 次関数に対してクラス決定尺度に基づいてクラス特定を行った結果を示す図である。

【図 29】0 次関数から 1 次関数に変化する関数に対してクラス決定尺度に基づいてクラス特定を行った結果を示す図である。

【図 30】クラス決定方法の実装方針を説明する図である。

【図 31】区間 1 に対してクラス決定方法に基づいた近似を行った場合の SN 比を示す図である。

【図 32】区間 2 に対してクラス決定方法に基づいた近似を行った場合の SN 比を示す図である。

【図 33】全区間に対してクラス決定方法に基づいた近似を行った場合の SN 比を示す図である。

【図 34】図 31～図 33 におけるパターン b で除去されたサンプル数の割合を示す図である。

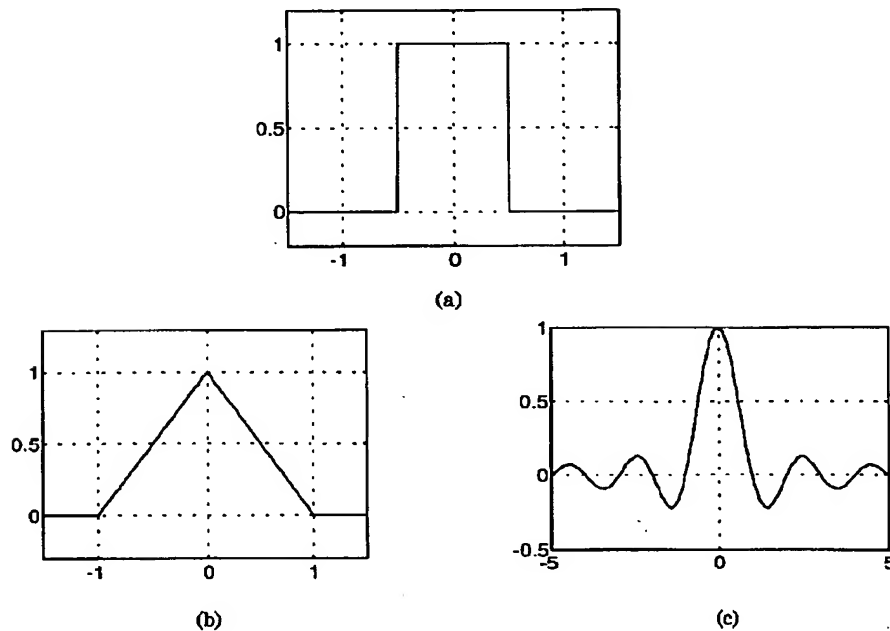
【図 35】一実施形態のデータ処理装置の構成図である。

【図 36】他の実施形態のデータ処理装置の構成図である。

【符号の説明】

- 100 入力部
- 110 データ変換部
- 200 間引き処理部
- 210 補間演算部
- 220 誤差演算部
- 230 クラス判定部
- 240 特異点抽出部

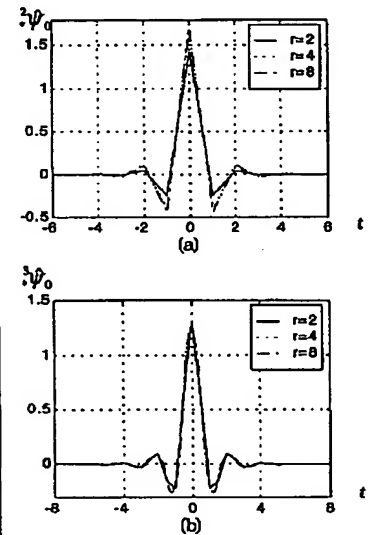
【図 1】



【図 6】

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_U	1.0000	1.5892	1.3335	1.2589	1.1481	1.1350	1.1220	1.1092	1.0965
m_u	0.3679	0.1716	0.2679	0.3613	0.4306	0.4883	0.5353	0.5747	0.6080
m_W	1.8011	1.3530	1.2861	1.2255	1.1861	1.1501	1.1320	1.1252	1.1135
m_w	0.2679	0.4306	0.5353	0.6080	0.6613	0.7019	0.7339	0.7597	0.7809

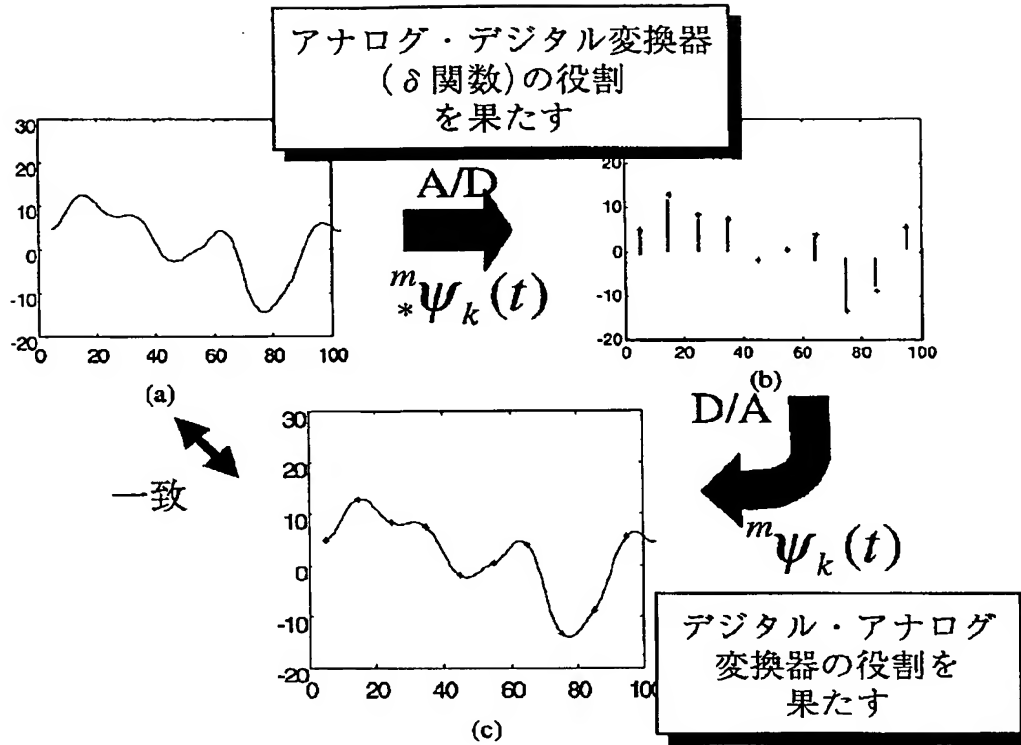
【図 11】



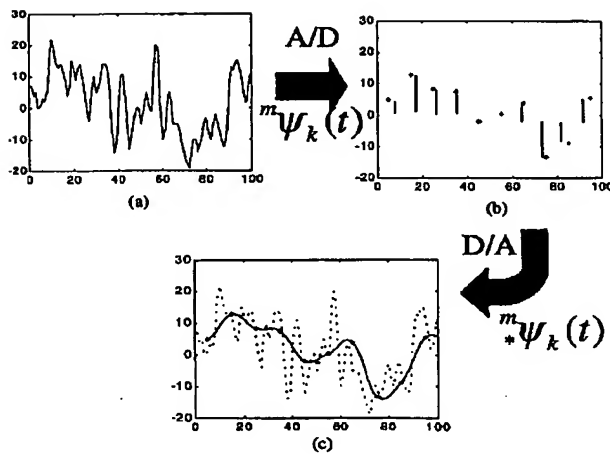
【図 14】

クラス	r=2		r=4	
	Fagen	Bach	Fagen	Bach
m=1	40.2	49.4	32.5	35.6
m=2	42.5	89.4	34.5	68.6
m=3	42.9	109.6	34.6	77.3
m=∞	21.6	62.5	20.5	62.0
m=∞ (d=24000)	43.1	81.8	34.79	77.9

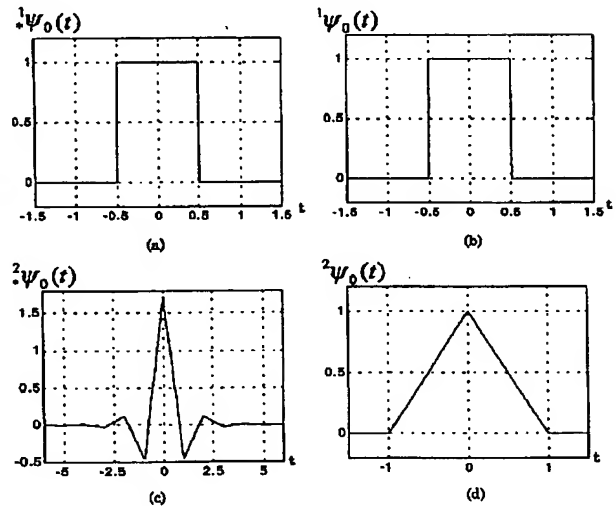
【図2】



【図3】



【図4】



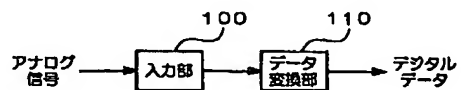
【図15】

クラス	SN 比 [dB]		
	区間 1	区間 2	全区間
m=1	87.6	80.3	49.4
m=2	87.1	100.2	89.4
m=3	87.1	115.4	109.6
m=∞	7.5	55.1	62.5
m=∞ (d=24000)	17.4	52.9	51.8

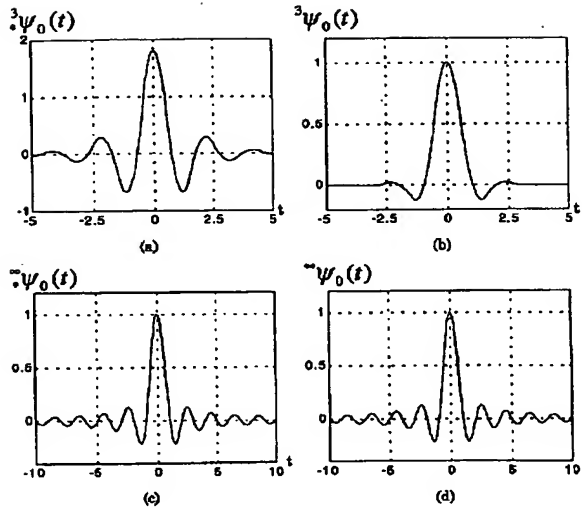
【図34】

区間 1	区間 2	全区間
77.5%	48%	25.23%

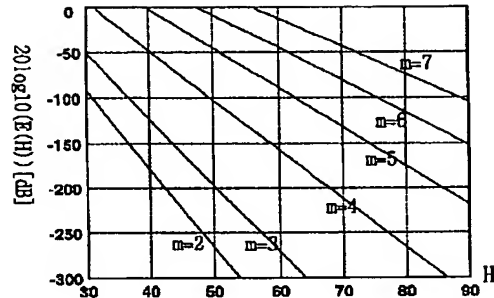
【図35】



【図5】



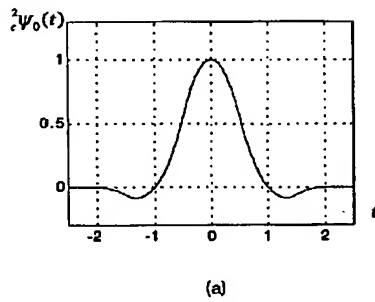
【図7】



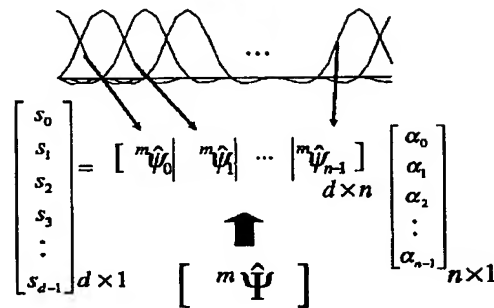
【図16】

クラス	SN比 [dB]		
	区間1	区間2	全区間
m=1	82.3	46.5	35.8
m=2	81.9	79.2	68.8
m=3	81.8	85.9	77.3
m=∞	7.5	55.0	62.0
m=∞ (d=24000)	17.5	53.0	77.9

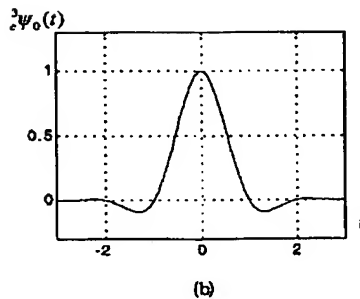
【図8】



【図9】



【図10】



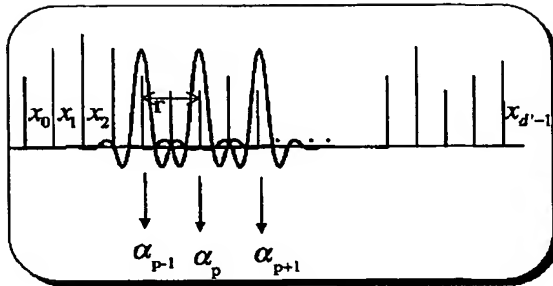
【図19】

クラス	r=2		r=4	
	Fagen	Bach	Fagen	Bach
m=1	40.2	49.4	32.5	35.8
m=2	42.5	89.4	34.5	68.6
m=3	42.9	109.6	34.6	77.3
m=∞ (d=24000)	43.1	81.8	34.7	77.9
最適近似	50.4	120.5	39.1	90.9

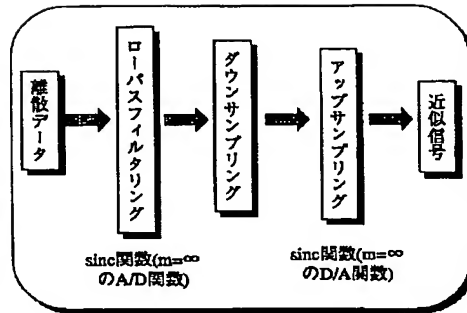
【図20】

	パターン1	パターン2
0 次関数	$f(t) = 1$	$f(t) = 1, t < 0.5$ $f(t) = -1, t \geq 0.5$
1 次関数	$f(t) = -t + 1$	$f(t) = t, t < 0.5$ $f(t) = -t + 1, t \geq 0.5$
2 次関数	$f(t) = -t^2 + 1$	$f(t) = -(t - 0.5)^2 + 1$
正弦波	$\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$	$\sin(\pi t)$

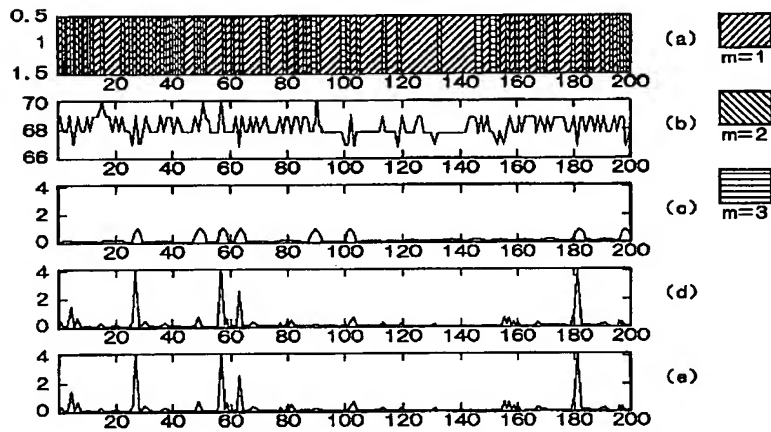
【図12】



【図13】



【図17】



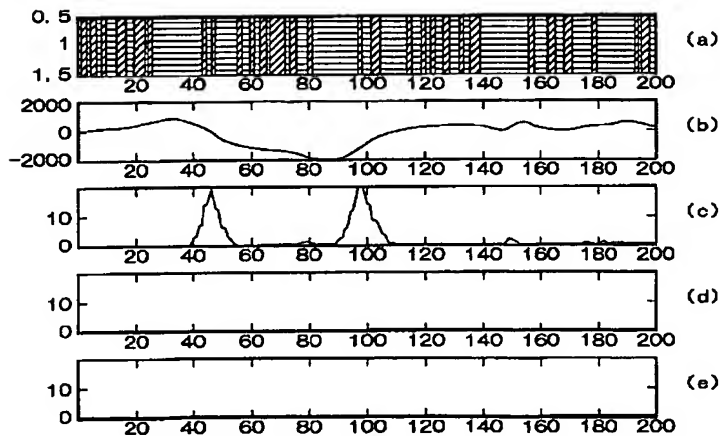
【図31】

	区画1におけるSN比[dB]	
	パターンa	パターンb
m=1	87.5	94.2
m=2	87.1	94.0
m=3	87.0	93.4
手法1	87.1	92.9
手法2	92.0	99.2

【図32】

	区画2におけるSN比[dB]	
	パターンa	パターンb
m=1	60.3	60.0
m=2	100.2	96.3
m=3	115.4	116.7
手法1	114.2	116.8
手法2	116.9	117.3

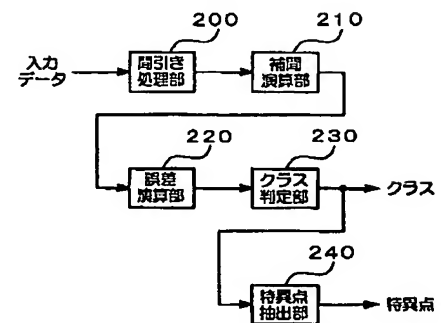
【図18】



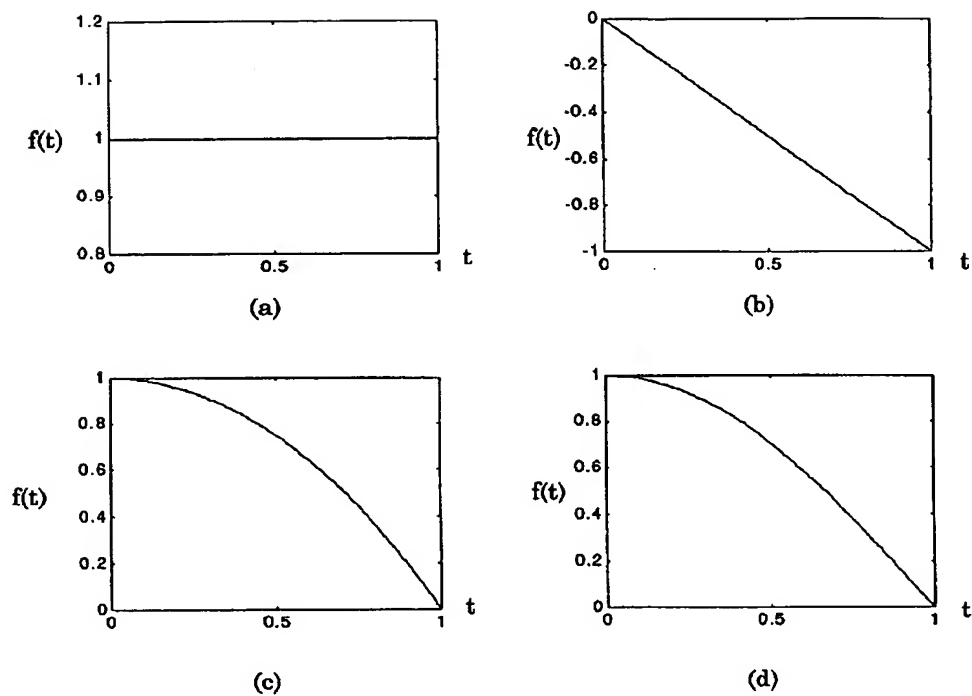
【図33】

	パターンa	パターンb
m=1	49.4	50.1
m=2	89.4	88.7
m=3	109.6	111.9
手法1	106.9	111.8
手法2	111.3	112.9

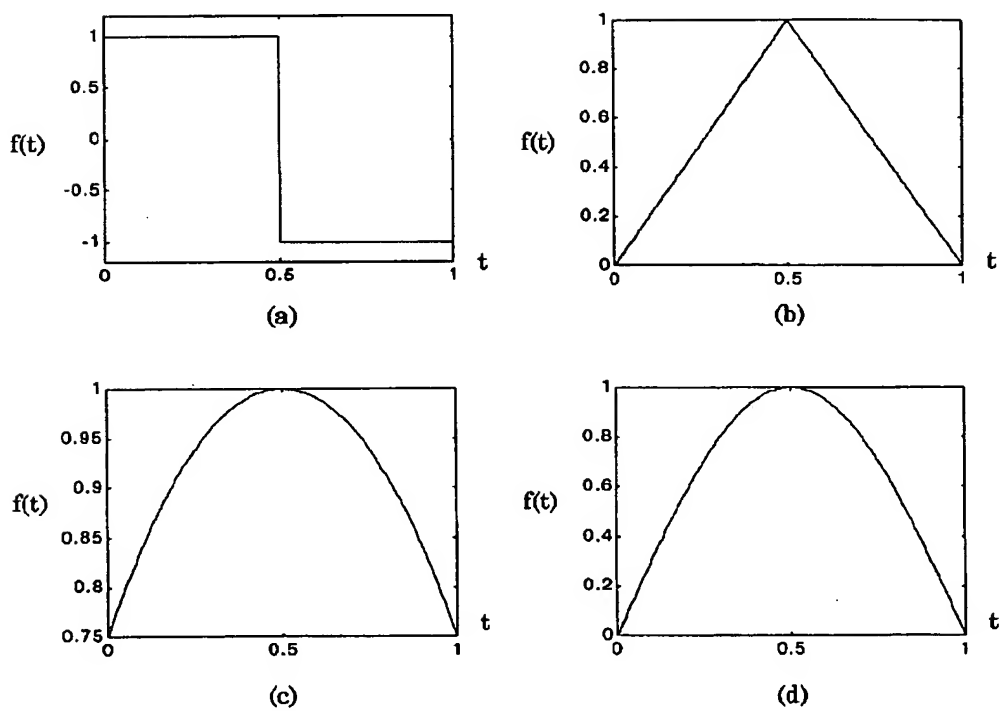
【図36】



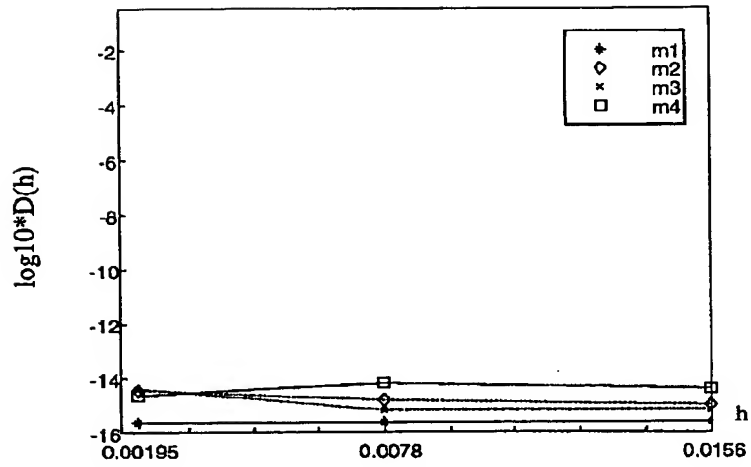
【図 2 1】



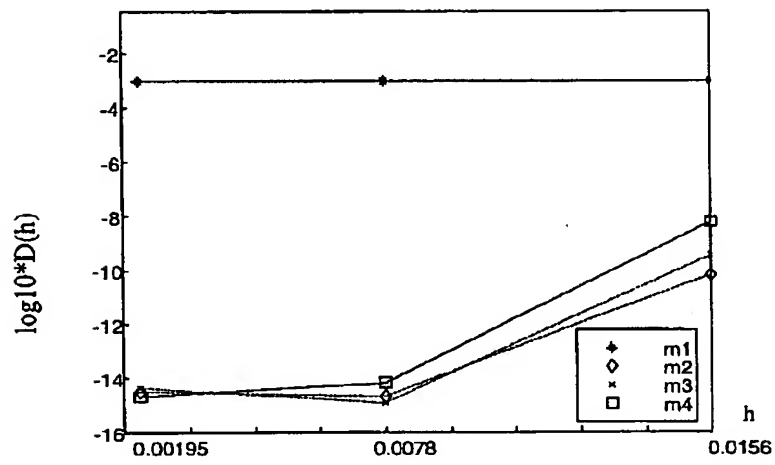
【図 2 2】



【図 23】

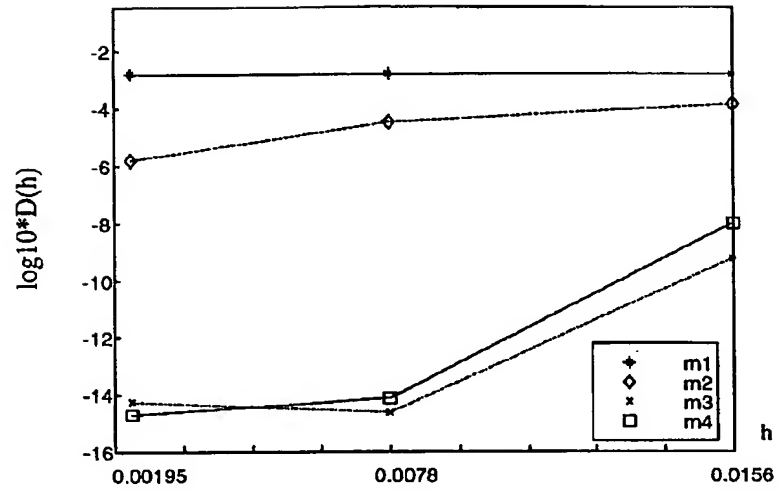


(a)

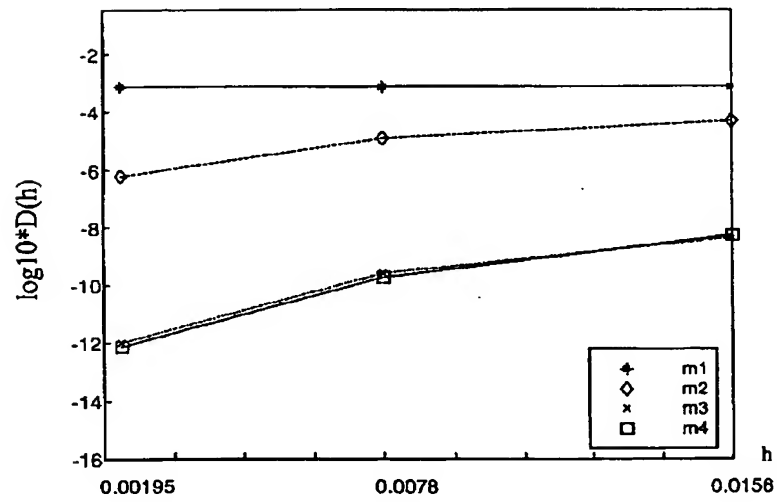


(b)

【図24】

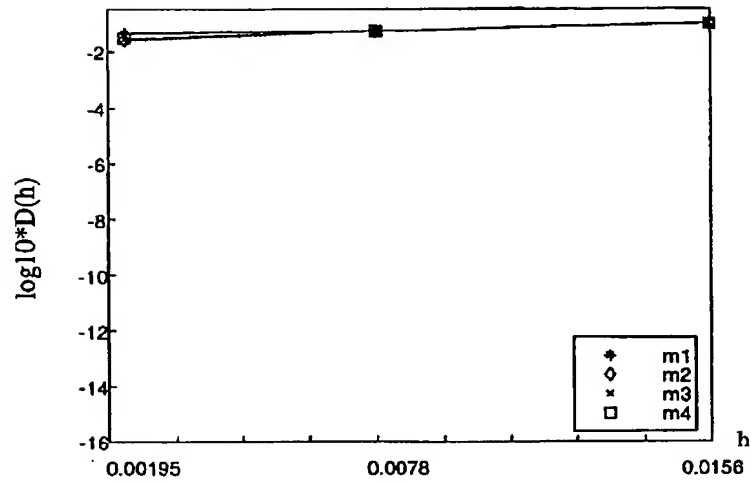


(a)

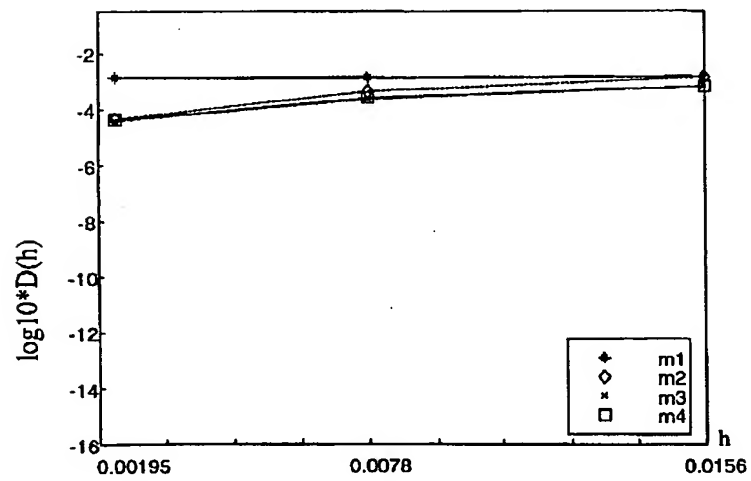


(b)

【図25】

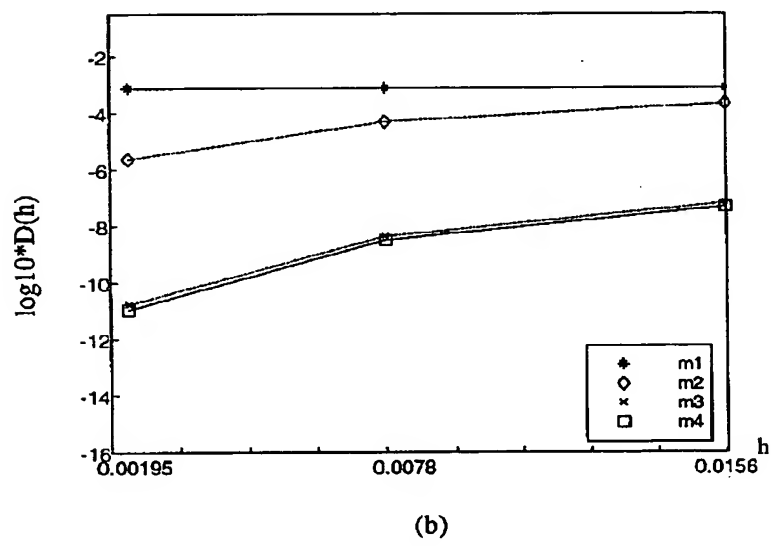
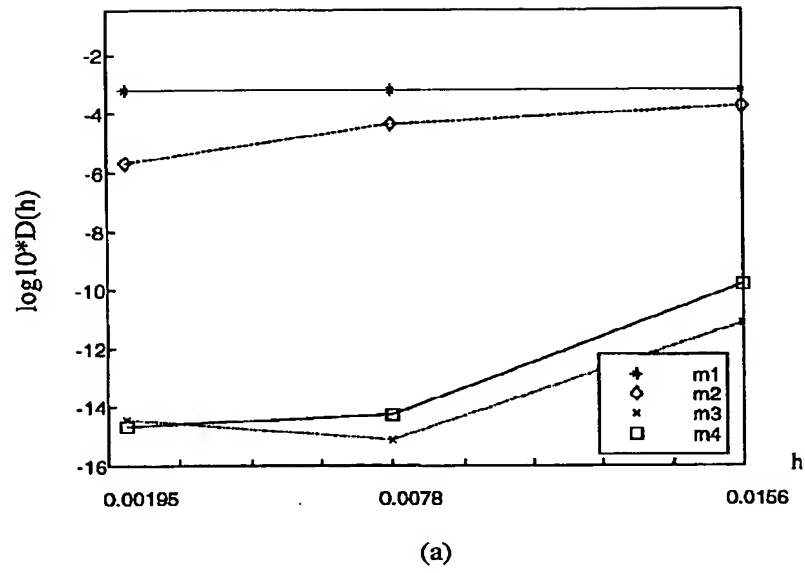


(a)

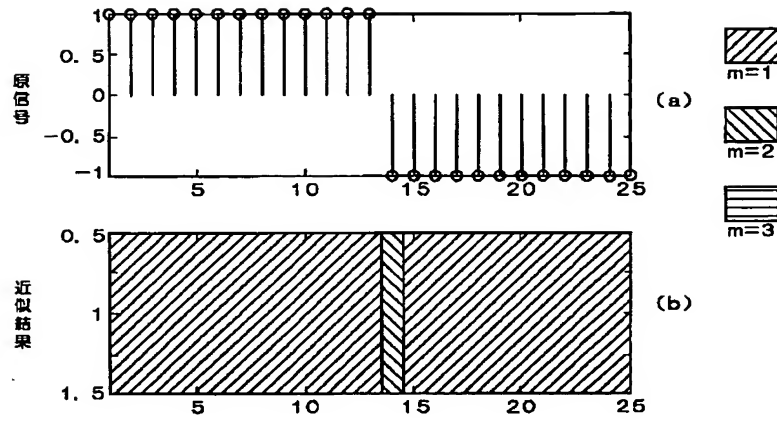


(b)

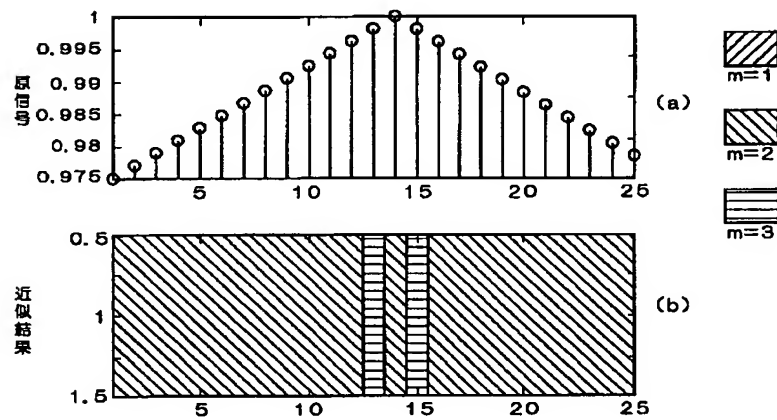
【図26】



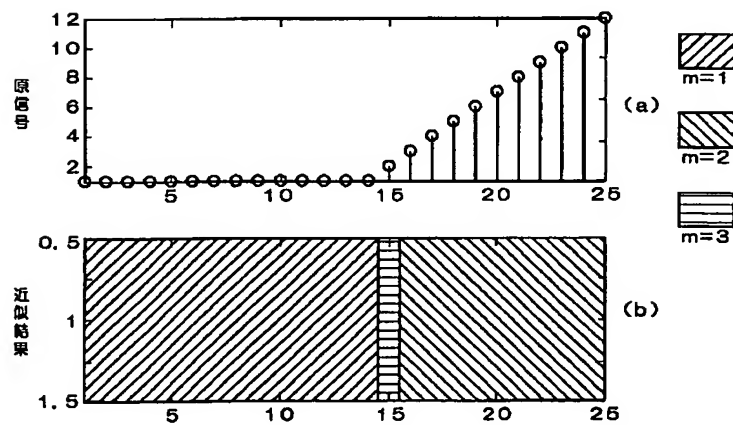
【図27】



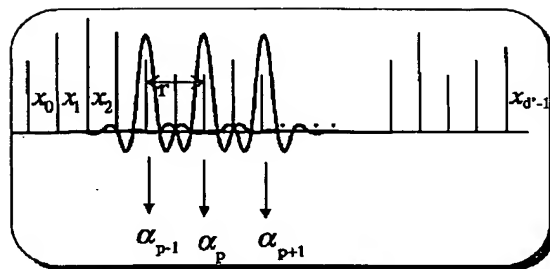
【図28】



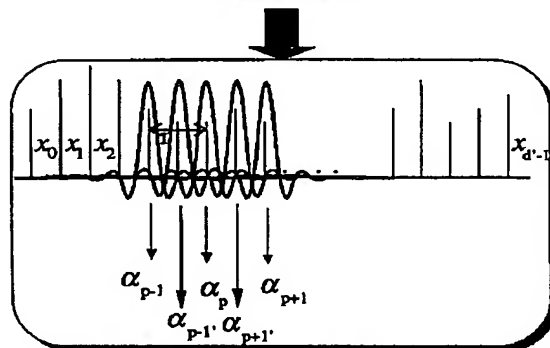
【図29】



【図 30】



(a) 展開係数の生成



(b) クラス決定尺度の導出法